Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(6 puncte)** Fie mulţimea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - 2z\}$.
   a) Să se arată că S este un subspaţiu al $\mathbb{R}$-spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.
   b) Pentru ce valori $a, b \in \mathbb{R}$ vectorii $(1, a, b)$ şi $(a, b, 0)$ aparţin lui S?
   c) Formează vectorii $(2, 2, -2)$ şi $(-2, 2, 0)$ o bază în S?
   Determinaţi $\dim_{\mathbb{R}} S$. Justificare.
2. **(3 puncte)** Să se arate că
$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$$
   este un izomorfism de grupuri de la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real $a > 0$, natura seriei de numere reale cu termeni pozitivi:
$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \cdot a^n}{5^n}.$$
2. **(3 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de gradul $n \in \mathbb{N}$, unde n este impar, ataşat funcţiei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
   în punctul $a = \pi$.
3. **(3 puncte)** Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\, e^{-x}$.
   a) Să se determine o primitivă a lui f pe mulțimea $\mathbb{R}$.
   b) Să se calculeze valoarea integralei
$$\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1 + (x+1)e^{-x}}\, dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(6 puncte)** Considerăm în plan triunghiul ABC pentru care $A(0, 0)$, $B(0, 18)$ şi $C(6, 6)$.
   a) Determinaţi ecuaţia medianei din vârful C al triunghiului ABC.
   b) Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AC]$.
   c) Determinaţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.
   d) Să se calculeze aria triunghiului AGC, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.
2. **(3 puncte)** Despre parabola $\mathcal{P}$ se cunoaşte că Ox este axa sa de simetrie, originea este vârful ei, iar punctul $A(3, 6)$ se află pe parabolă.
   a) Să se scrie ecuaţia parabolei $\mathcal{P}$.
   b) Să se determine coordonatele focarului F al parabolei şi ecuaţia directoarei sale.
   c) Să se scrie ecuaţia tangentei la parabolă în punctul A.

SUBIECTUL IV. Informatică

Notă pentru subiectul de Informatică:
Pentru rezolvarea problemelor 1 și 2 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.
Se va indica limbajul de programare folosit.
Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 puncte)** Scrieţi un program care:
   a) Implementează o clasă ***Student*** cu următoarele atribute protejate:
   - ***nume*** de tip string
   - ***media*** de tip real.

   Adăugaţi clasei:
   - un ***constructor*** cu parametri
   - metodele ***get/set*** pentru toate atributele
   - o metodă ***toString*** care returnează un string format din numele studentului și media studentului separate prin spaţiu.

   b) Derivaţi clasa ***StudentBursier*** din clasa ***Student*** care are toate atributele clasei Student și adaugă atributul privat ***tipBursa*** de tip string. Adăugaţi metodele ***get/set*** pentru atributul nou adăugat. Metoda ***toString*** în cazul clasei ***StudentBursier*** va returna conţinutul metodei ***toString*** din clasa ***Student*** la care va mai concatena tipul bursei.

2. **(2 puncte)** Creaţi un vector cu cel puţin trei obiecte, dintre care unul de tip ***Student*** și unul de tip ***StudentBursier*** și scrieţi o secvenţă de cod care îl ordonează alfabetic după nume.

3. **(2 puncte)** Scrieţi liniile de cod lipsă din următoarea funcție pentru a determina obiectele de tip ***StudentBursier*** din vectorul ***stud*** care au media mai mare decât parametrul ***nota*** și au tipul bursei egal cu parametrul ***tipBursa***. Funcţia *push_back()* inserează un element la finalul vectorului.

```
vector<StudentBursier> filter(vector<StudentBursier> stud, float nota, string tipBursa){
    vector<StudentBursier> rez;
  ….
  return rez;}
```

4. **(2 puncte)** Precizaţi ce se afişează în urma executării secvenţei de instrucţiuni de mai jos. Functia *push_back()* inserează un element la finalul vectorului, funcţia *pop_back()* șterge ultimul element al vectorului, iar funcţia *back*() returnează o referinţă la ultimul element din vector.

```
std::vector<Student> v;
v.push_back(Student("Alexandru", 9.67));
v.push_back(StudentBursier("Tudor", 8.93, "studiu"));
v.push_back(Student("Ana", 9.33));
v.push_back(StudentBursier("Maria", 9.83, "merit"));
v.pop_back();
v.pop_back();
cout<<v.back().toString()<<endl;
```

5. **(1 punct)** Ce înţelegeţi prin încapsularea datelor? Exemplificaţi printr-o secvenţă de cod.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) **Varianta 1:** $S \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (0,0,0) \in S$ şi $v_1 + v_2 \in S$ şi $av \in S$ pentru orice $v_1, v_2, v \in S$ şi $a \in \mathbb{R}$:
$(0,0,0) \in S$ 0.5p
Dacă $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in S$ $(i = 1,2)$ atunci avem $x_i = -y_i - 2z_i$ din care rezultă că
$x_1 + x_2 = -(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2)$, adică $v_1 + v_2 \in S$. 1p
Fie $v = (x, y, z) \in S$ şi $a \in \mathbb{R}$. Obţinem că $ax = -ay - 2az$ care evidenţiază că $av \in S$. 1p
Varianta 2: S este dată de ecuaţia unui plan în $\mathbb{R}^3$ care trece prin origine, prin urmare formează un subspaţiu al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$. 2.5p

b) $(1, a, b), (a, b, 0) \in S \Leftrightarrow 1 = -a - 2b$ şi $a = -b$, ... 1p
din care obţinem că $a = 1$ şi $b = -1$. 1p

c) **Varianta 1:** Vectorii $(2, 2, -2)$ şi $(-2, 2, 0)$ formează o bază în S, deoarece
pentru fiecare vector $(-y - 2z, y, z) \in S$ egalitatea
$\lambda_1(2, 2, -2) + \lambda_2(-2, 2, 0) = (-y - 2z, y, z)$ 0.5p
conduce la un sistem care are o soluţie unică $\lambda_1 = -z/2$ şi $\lambda_2 = (y + z)/2$. 0.5p
Dimensiunea lui S este 2 pentru că avem o bază cu 2 elemente. 0.5p
Varianta 2:
Verificarea independenţei liniare 0.5p
Verificarea faptului că vectorii generează S 0.5p
Dimensiunea lui S este 2 pentru că avem o bază cu 2 elemente. 0.5p
Varianta 3:
Dimensiunea planului S este egală cu 2. .... 0.5p
Mai mult, din faptul că vectorii $(2, 2, -2)$ şi $(-2, 2, 0)$ aparţin lui S şi nu sunt coliniari, adică sunt liniar independenţi, rezultă că ei formează o bază în planul S. 1p

2. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$ este un izomorfism, deoarece pentru orice $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avem
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ 1p
Funcţia f este bijectivă deoarece există funcţia $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f^{-1}(x) = e^x$ 1p
astfel încât $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}_+^*}$ şi $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$ 1p

sau

Verificarea injectivităţii 1p
Verificarea surjectivităţii 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Aplicăm criteriul raportului, calculând limita

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 a^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^2 a^n} = \frac{a}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{a}{5}.$$

.... (1p)

- Dacă $\ell = \frac{a}{5} < 1$, adică $a < 5$, atunci seria este convergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = \frac{a}{5} > 1$, adică $a > 5$, atunci seria este divergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = \frac{a}{5} = 1$, adică $a = 5$, atunci termenul general al seriei nu tinde la 0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

astfel seria este divergentă. .... (1p)

2. Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ în punctul $a \in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Pentru problema actuală $I = \mathbb{R}$, iar $a = \pi$.

Se calculează derivatele de ordinul 1 şi 2:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad f''(x) = -\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

.... (0,5p)

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{sau} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k \\ -\frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k+1 \\ -\frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k+2 \\ \frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k+3 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

.... (1p)

Se observă că

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n = 2t \\ \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+1}}, & \text{dacă} \quad n = 2t+1 \end{cases}.$$

.... (0,5p)

Astfel polinomul lui Taylor ataşat funcţiei f în punctul $a = \pi$, ştiind că n este impar, deci de forma $n = 2t+1$, este următorul:

$$\begin{aligned} T_{n,\pi}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(x-\pi)^k = \sum_{k=0}^{t} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1} = \\ &= 0 - \frac{1}{2}(x-\pi) + 0 + \frac{1}{2^3\cdot 3!}(x-\pi)^3 + ... + \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+1}\cdot(2t+1)!}(x-\pi)^{2t+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

.... (0,5p)

3. $a)$ Folosim integrarea prin părți:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x\,e^{-x}\,dx = \int x\,(-e^{-x})'\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = \\ &= -x\,e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)\,e^{-x}.\end{aligned}$$

.... (1,0p)

$b)$ Conform punctului $a)$,

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x\,e^{-x}}{1+(x+1)e^{-x}}\,dx =$$

.... (1,0p)

$$= -\int_{-1}^{0} \frac{(1+(x+1)e^{-x})'}{1+(x+1)e^{-x}}\,dx = -\ln(1+(x+1)e^{-x})\,\Big|_{-1}^{0} = -\ln 2.$$

.... (1,0p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Mijlocul segmentului $[AB]$ este $P(0,9)$. Ecuaţia medianei cerute este $x+2y-18=0$ 1p
   b) Mijlocul segmentului $[AC]$ este $N(3,3)$. Mediatoarea cerută are ecuaţia $y-3=-1\cdot(x-3) \Leftrightarrow x+y-6=0$. 1p
   c) Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuaţia $y=9$. Centrul cercului circumscris se află la intersecţia mediatoarelor. 1p
   Centrul cercului circumscris are coordonatele $(-3,9)$, deci raza cercului este $R=3\sqrt{10}$. Ecuaţia cercului este $(x+3)^2+(y-9)^2=90$. 1p
   d) Coordonatele centrului de greutate sunt $(2,8)$ 1p
   Aria triunghiului AGC este egală cu
$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| = 18.$$
   .... 1p

2. a) Ecuaţia parabolei este $\mathcal{P}: y^2=12x$ 1p
   b) Focarul este $F(3,0)$, iar directoarea este dreapta $d: x=-3$ 1p
   c) Ecuaţia tangentei la parabolă în punctul A este $6y=6(x+3) \Leftrightarrow x-y+3=0$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licenţă septembrie 2023
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1.	**2p**
a) Definitie clasa de baza (constructor, metode, acces la date).........................	1 p
b) Definitie clasa derivata StudentBursier(mostenire, constructor, metoda)......	1 p
2.	**2p**
Creare vector..	1p
Sortare vector...	1p
3.	**2p**
Secventa filtrare (iterare elemente, comparatii , actualizare rezultat)	2p
4.	**2p**
Indicarea corecta a obiectului ce se afiseaza..	2p
5.	**1p**
Explicarea teoretica	0.5p
Exemplificare...	0.5p

Notă:
(1p) Oficiu