Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Informatikai matematika szak

I TÉTEL. Algebra

1. **(6 pont)** Tekintsük az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - 2z\}$ halmazt.
   a) Igazoljuk, hogy S egy altere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek.
   b) Az $a, b \in \mathbb{R}$ mely értékeire lesznek az $(1, a, b)$ és $(a, b, 0)$ vektorok az S elemei?
   c) Bázist alkotnak-e S-ben a $(2, 2, -2)$ és $(-2, 2, 0)$ vektorok?
   Határozzuk meg $\dim_{\mathbb{R}} S$-t! Indoklás.
2. **(3 pont)** Igazoljuk, hogy az
$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$$
függvény egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ és $(\mathbb{R}, +)$ csoportok között.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Az $a > 0$ valós paraméter függvényében tanulmányozzuk a következő pozitív tagú valós számsor természetét:
$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \cdot a^n}{5^n}.$$
2. **(3 pont)** Írjuk fel az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
függvény n-edrendű (n páratlan) Taylor-féle polinomját az $a = \pi$ pontban!
3. **(3 pont)** Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\, e^{-x}$ függvényt.
   a) Határozzuk meg az f egy primitív függvényét az $\mathbb{R}$ halmazon!
   b) Számítsuk ki az
$$\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1 + (x+1)e^{-x}}\, dx$$
   határozott integrált!

III. TÉTEL. Geometria

1. **(6 puncte)** Tekintjük a síkban az ABC háromszöget, ahol $A(0, 0)$, $B(0, 18)$ és $C(6, 6)$.
   a) Határozzuk meg az ABC háromszög C csúcsához tartozó oldalfelező egyenletét.
   b) Határozzuk meg az $[AC]$ szakasz oldalfelező merőlegesének egyenletét.
   c) Írjuk fel az ABC háromszög köré írt kör egyenletét.
   d) Számítsuk ki az AGC háromszög területét, ahol G az ABC háromszög súlypontja.
2. **(3 puncte)** Tudjuk, hogy a $\mathcal{P}$ parabola szimmetriatengelye az Ox tengely, a csúcsa az origó és áthalad az $A(3, 6)$ ponton.
   a) Írjuk fel a $\mathcal{P}$ parabola egyenletét.
   b) Határozzuk meg a parabola F fókuszpontjának koordinátáit, majd a vezérgyenesének egyenletét.
   c) Írjuk fel a parabola A pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.

IV. TÉTEL. Informatika

Az informatika tételre vonatkozó megjegyzés:
Az 1. és 2. feladat megoldásához a C++, Python, Java és C# programozási nyelvek egyike használható.
Meg kell adni a használt programozási nyelvet.
A megoldásokhoz használhatóak a meglévő könyvtárak (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 pont)** Írjunk programot, amelyben:
   a) bevezetjük a ***Student*** osztályt az alábbi védelemmel rendelkező attribútumokkal:
      - ***nume,*** melynek típusa karakterlánc
      - ***media,*** melynek típusa valós.

      Az osztályhoz hozzáadjuk az alábbiakat:
      - egy paraméteres ***konstruktort***
      - a ***get/set*** metódusokat az összes attribútumra
      - egy ***toString*** metódust, mely egy olyan karakterláncot térít vissza, amely a diák nevéből és médiájából áll, szóközzel elválasztva.

   b) Hozzuk létre a ***StudentBursier*** származtatott osztályát a ***Student*** osztálynak, amely rendelkezik a Student osztály összes attribútumával és ezen kívül tartalmazza a ***tipBursa*** karakterlánc típusú privát attribútumot. Adjuk hozzá az új attribútumra vonatkozó ***get/set*** metódusokat is. A ***toString*** metódus a ***StudentBursier*** osztály esetén a ***Student*** osztálybeli ***toString*** által meghatározott karakterlánchoz hozzáfűzi az ösztöndíj típusát, majd a kapott karakterláncot visszatéríti.

2. **(2 pont)** Hozzunk létre egy legalább három objektumból álló vektort, amelyekből legalább egy ***Student*** típusú és legalább egy ***StudentBursier*** típusú. Írjunk kódrészletet, amely név szerinti ábécé sorrendbe rendezi a vektort.

3. **(2 pont)** Írjuk meg az alábbi függvényből hiányzó kódrészletet annak érdekében, hogy a ***stud*** vektorból meghatározzuk azokat a ***StudentBursier*** típusú objektumokat, melyeknek a médiája nagyobb, mint ***nota*** és típusa megegyezik a ***tipBursa*** paraméterrel. A *push_back()* függvény egy elemet szúr be a vektor végére.

```
vector<StudentBursier> filter(vector<StudentBursier> stud, float nota, string tipBursa){
      vector<StudentBursier> rez;
    ....
   return rez;}
```

4. **(2 pont)** Adjuk meg, hogy mi jelenik meg a kimeneten az alábbi kódrészlet végrehajtásakor. A *push_back()* függvény egy elemet szúr be a vektor végére, a *pop_back()* függvény kitörli a vektor utolsó elemét és a *back()* függvény egy referenciát térít vissza a vektor utolsó elemére.

```
std::vector<Student> v;
v.push_back(Student("Alexandru", 9.67));
v.push_back(StudentBursier("Tudor", 8.93, "studiu"));
v.push_back(Student("Ana", 9.33));
v.push_back(StudentBursier("Maria", 9.83, "merit"));
v.pop_back();
v.pop_back();
cout<<v.back().toString()<<endl;
```

5. **(1 pont)** Mit értünk zártság alatt az objektumorientált programozásban? Adjunk példát egy kódrészlet által.

MEGJEGYZÉS.
Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A legkisebb átmenő jegy: 5,00.
Munkaidő: 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

I TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) **1. Módszer:** $S \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (0,0,0) \in S$, $v_1 + v_2 \in S$ és $av \in S$ minden $v_1, v_2, v \in S$ és $a \in \mathbb{R}$ esetén:
$(0,0,0) \in S$ 0.5p
Hogyha $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in S$ $(i = 1,2)$ akkor $x_i = -y_i - 2z_i$, ahonnan következik, hogy
$x_1 + x_2 = -(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2)$, vagyis $v_1 + v_2 \in S$. 1p
Legyen $v = (x,y,z) \in S$ és $a \in \mathbb{R}$. Kapjuk, hogy $ax = -ay - 2az$, amely alapján $av \in S$. 1p
2. Módszer: Az S halmaz az $\mathbb{R}^3$ egy origón átmenő síkjának egyenletével van értelmezve, így valóban egy altere az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. 2.5p

b) $(1,a,b), (a,b,0) \in S \Leftrightarrow 1 = -a - 2b$ és $a = -b$, ... 1p
ahonnan következik, hogy $a = 1$ és $b = -1$. 1p

c) **1. Módszer:** A $(2,2,-2)$ és $(-2,2,0)$ vektorok egy bázist alkotnak S-ben, mivel minden $(-y-2z, y, z) \in S$ vektorra a
$\lambda_1(2,2,-2) + \lambda_2(-2,2,0) = (-y-2z, y, z)$ egyenletrendszernek 0.5p
a $\lambda_1 = -z/2$ és $\lambda_2 = (y+z)/2$ értékek egyértelmű megoldásai. 0.5p
S dimenziója 2, mivel van egy 2 elemű bázisunk. 0.5p
2. Módszer:
Lineáris függetlenség ellenőrzése. 0.5p
A megadott vektorok generálják S-et. 0.5p
S dimenziója 2, mivel van egy 2 elemű bázisunk. 0.5p
3. Módszer:
S dimenziója 2, mivel S egy sík a térben. 0.5p
Továbbá, mivel a két S-beli vektor, a $(2,2,-2)$ és a $(-2,2,0)$, nem kollineárisak, vagyis lineárisan függetlenek, ezért ők egy bázisát alkotják S-nek. 1p

2. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$ egy csoportizomorfizmus, mivel minden $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ elemre
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$. 1p
f bijectív, mivel létezik az $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f^{-1}(x) = e^x$ 1p
úgy, hogy $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}_+^*}$ şi $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$. 1p
vagy
Injektivitás ellenőrzése. 1p
Szürjektivitás ellenőrzése. 1p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. A hányados kritérium alkalmazásához kiszámítjuk a következő határértéket:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 a^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^2 a^n} = \frac{a}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{a}{5}.$$

.... (1p)

- Ha $\ell = \frac{a}{5} < 1$, vagyis $a < 5$, akkor a sor konvergens;.. (0,5p)
- ha $\ell = \frac{a}{5} > 1$, vagyis $a > 5$, akkor a sor divergens;.. (0,5p)
- ha $\ell = \frac{a}{5} = 1$, vagyis $a = 5$, akkor a sor általános tagja nem tart a 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

  ezért a sor divergens.. (1p)

2. Az $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-szer deriválható függvény n-edrendű Taylor-féle polinomja az $a \in I$ pontban a $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

polinomfüggvény. .... (0,5p)

Jelen feladat esetén $I = \mathbb{R}$ és $a = \pi$.

Kiszámítjuk az első- és másodrendű deriváltakat:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad f''(x) = -\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

.... (0,5p)

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{vagy} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{ha} \quad n = 4k \\ -\frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{ha} \quad n = 4k+1 \\ -\frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{ha} \quad n = 4k+2 \\ \frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{ha} \quad n = 4k+3 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

.... (1p)

Megfigyelhető, hogy

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n = 2t \\ \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+1}}, & \text{ha} \quad n = 2t+1 \end{cases}.$$

.... (0,5p)

Az f függvény n-edrendű Taylor-féle polinomja az $a = \pi$ pontban n páratlan szám, vagyis $n = 2t+1$ alakú szám esetén a következő:

$$\begin{aligned} T_{n,\pi}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(x-\pi)^k = \sum_{k=0}^{t} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1} = \\ &= 0 - \frac{1}{2}(x-\pi) + 0 + \frac{1}{2^3\cdot 3!}(x-\pi)^3 + ... + \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+1}\cdot(2t+1)!}(x-\pi)^{2t+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

.... (0,5p)

3. *a*) A parciális integrálás képletét használva

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x\,e^{-x}\,dx = \int x\,(-e^{-x})'\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = \\ &= -x\,e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)\,e^{-x}.\end{aligned}$$

.... (1,0p)

b) Az *a*) alpont alapján,

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x\,e^{-x}}{1+(x+1)e^{-x}}\,dx =$$

.... (1,0p)

$$= -\int_{-1}^{0} \frac{(1+(x+1)e^{-x})'}{1+(x+1)e^{-x}}\,dx = -\ln(1+(x+1)e^{-x})\,\Big|_{-1}^{0} = -\ln 2.$$

.... (1,0p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 szeptember
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) Az AB szakasz felezőpontja $P(0,9)$. A kért oldalfelező egyenlete $x + 2y - 18 = 0$ 1p
   b) Az AC szakasz felezőpontja $N(3,3)$. A kért oldalfelző merőleges egyenlete $y - 3 = -1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow x + y - 6 = 0$. 1p
   c) Az AB szakasz oldalfelező merőlegesének egyenlete: $y = 9$. A kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. 1p
   A kör középpontja $M_0(-3,9)$, $R = 3\sqrt{10}$. A kör egyenlete $(x+3)^2 + (y-9)^2 = 90$. 1p
   d) A súlypont koordinátái $(2,8)$ 1p
   Az AGC háromszög területe:
$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| = 18.$$
   .... 1p

2. a) A parabola egyenlete $\mathcal{P} : y^2 = 12x$ 1p
   b) A fókuszpont $F(3,0)$, a vezéregyenes $d : x = -3$ 1p
   c) Az A ponthoz tartozó érintő egyenlete $6y = 6(x+3) \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$. 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

BABEŞ -BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs informatika tétel
1. vizsga: alapismeretek és szakismeretek kiértékelése, záróvizsga 2023 szeptember
Informatikai matematika szak

Informatika tétel

1.	**2p**
a) Alaposztály definiálása (konstruktor, metódusok, hozzáférés az adatokhoz)	1 p
b) A StudentBursier származtatott osztály definiálása (öröklés, konstruktor, metódusok)	1 p
2.	**2p**
Vektor létrehozása	1p
Vektor rendezése	1p
3.	**2p**
Szűrést megvalósító kódrészlet (iterálás az elemeken, összehasonlítások, eredmény aktualizálása)	2p
4.	**2p**
A kiírandó karakterlánc helyes megadása	2p
5.	**1p**
Az elmélet elmagyarázása	0.5p
Példa	0.5p

Megjegyzés:
(1p) Hivatalból