Babeş-Bolyai University
Faculty of Matematics and Computer Science

GRADUATION EXAM
Written Test - September 2023
Mathematics Computer Science Study Programme

SUBJECT I. Algebra

1. **(6 points)** Consider $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - 2z\}$.
   a) Show that S is a subspace of the $\mathbb{R}$-vector space $\mathbb{R}^3$.
   b) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ such that the vectors $(1, a, b)$ and $(a, b, 0)$ belong to S.
   c) Do the vectors $(2, 2, -2)$ and $(-2, 2, 0)$ form a basis in S? Determine $\dim_{\mathbb{R}} S$. Motivate your answer.
2. **(3 points)** Show that
   $$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$$
   is a group isomorphism from $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ into $(\mathbb{R}, +)$.

SUBJECT II. Calculus

1. **(3 points)** Study, with discussion on the real paramater $a > 0$, the nature of the following series with positive terms:
   $$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \cdot a^n}{5^n}.$$
2. **(3 points)** Write Taylor's polynomial of random rank $n \in \mathbb{N}$, when n is odd, attached to the function
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$
   about the point $a = \pi$.
3. **(3 points)** Consider the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\, e^{-x}$.
   a) Determine an antiderivative of the function f on the set $\mathbb{R}$.
   b) Compute the value of the definite integral:
   $$\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{1 + (x+1)e^{-x}}\, dx.$$

SUBJECT III. Geometry

1. **(6 points)** Consider the triangle ABC such that $A(0, 0)$, $B(0, 18)$ and $C(6, 6)$.
   a) Determine the equation of the median passing through C of the triangle ABC.
   b) Determine the equation of the perpendicular bisector of the segment $[AC]$.
   c) Determine the equation of the circumscribed circle of the triangle ABC.
   d) Calculate the area of the triangle AGC, where G is the centroid (centre of mass) of ABC.
2. **(3 points)** About the parabola $\mathcal{P}$ it is known that Ox is its symmetry axis, the origin O is its vertex and the point $A(3, 6)$ belongs to the parabola.
   a) Determine the equation of the parabola $\mathcal{P}$.
   b) Determine the coordinates of its focus F and the equation of its directrix (director line).
   c) Find the equation of the tangent line to the parabola in the point A.

SUBJECT IV. Computer Science

Note for the Computer Science subject:
One of the programming languages C++, Python, Java or C# can be used to solve problems 1 and 2.
Please indicate the programming language used.
Existing libraries (from C++, Python, Java, C#) can be used in the provided solutions.

1. **(2 points)** Write a program that:
   a) Implements a ***Student*** class with the following protected attributes:
   - ***name*** of type string
   - ***gpa*** of type float.

   Add to the class:
   - a parameterized ***constructor***
   - ***get/set*** methods for all the attributes
   - a ***toString*** method that returns a string consisting of the student's name and the student's GPA separated by a space.

   b) Derive the class ***ScholarshipStudent*** from the class ***Student*** which has all the attributes of the class ***Student*** and adds the private attribute ***scholarshipType*** of type string. Add the ***get/set*** methods for the newly added attribute. The ***toString*** method for the ***ScholarshipStudent*** class will return the contents of the ***toString*** method from the ***Student*** class to which it will also concatenate the scholarship type.

2. **(2 points)** Create a vector with at least three objects, at least one of type ***Student*** and one of type ***ScholarshipStudent***, and write a sequence of code that sorts it alphabetically by the student's name.

3. **(2 points)** Fill in the missing lines of code in the following function to determine the ***ScholarshipStudent*** objects in the ***stud*** vector that have a GPA greater than the ***gpa*** parameter and have the scholarship type equal to the ***scholarshipType*** parameter. The *push_back*() function inserts an element at the end of the vector.

```
vector<ScholarshipStudent> filter(vector<ScholarshipStudent> stud, float gpa, string scholarshipType){
      vector<ScholarshipStudent> res;
    ….
    return res;}
```

4. **(2 points)** Specify what will be displayed after executing the statements below. The *push_back*() function inserts an element at the end of the vector, the *pop_back*() function deletes the last element of the vector, and the *back*() function returns a reference to the last element in the vector.

```
std::vector<Student> v;
v.push_back(Student("Alexandru", 9.67));
v.push_back(ScholarshipStudent("Tudor", 8.93, "study"));
v.push_back(Student("Ana", 9.33));
v.push_back(ScholarshipStudent("Maria", 9.83, "merit"));
v.pop_back();
v.pop_back();
cout<<v.back().toString()<<endl;
```

5. **(1 point)** What is the concept of data encapsulation? Exemplify with a code sequence.

NOTE.
All subjects are compulsory and full solutions are requested.
An initial score of **1 point** is awarded to each subject. The minimum passing grade is 5,00.
The working time is 3 hours.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) **Varianta 1:** $S \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (0,0,0) \in S$ şi $v_1 + v_2 \in S$ şi $av \in S$ pentru orice $v_1, v_2, v \in S$ şi $a \in \mathbb{R}$:
$(0,0,0) \in S$ 0.5p
Dacă $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in S$ $(i = 1, 2)$ atunci avem $x_i = -y_i - 2z_i$ din care rezultă că
$x_1 + x_2 = -(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2)$, adică $v_1 + v_2 \in S$. 1p
Fie $v = (x, y, z) \in S$ şi $a \in \mathbb{R}$. Obţinem că $ax = -ay - 2az$ care evidenţiază că $av \in S$. 1p
Varianta 2: S este dată de ecuaţia unui plan în $\mathbb{R}^3$ care trece prin origine, prin urmare formează un subspaţiu al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$. 2.5p
   b) $(1, a, b), (a, b, 0) \in S \Leftrightarrow 1 = -a - 2b$ şi $a = -b$,.. 1p
din care obţinem că $a = 1$ şi $b = -1$. 1p
   c) **Varianta 1:** Vectorii $(2, 2, -2)$ şi $(-2, 2, 0)$ formează o bază în S, deoarece
pentru fiecare vector $(-y - 2z, y, z) \in S$ egalitatea
$\lambda_1(2, 2, -2) + \lambda_2(-2, 2, 0) = (-y - 2z, y, z)$ 0.5p
conduce la un sistem care are o soluţie unică $\lambda_1 = -z/2$ şi $\lambda_2 = (y + z)/2$. 0.5p
Dimensiunea lui S este 2 pentru că avem o bază cu 2 elemente. 0.5p
Varianta 2:
Verificarea independenţei liniare 0.5p
Verificarea faptului că vectorii generează S 0.5p
Dimensiunea lui S este 2 pentru că avem o bază cu 2 elemente. 0.5p
Varianta 3:
Dimensiunea planului S este egală cu 2. .... 0.5p
Mai mult, din faptul că vectorii $(2, 2, -2)$ şi $(-2, 2, 0)$ aparţin lui S şi nu sunt coliniari, adică sunt liniar independenţi, rezultă că ei formează o bază în planul S. 1p

2. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$ este un izomorfism, deoarece pentru orice $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avem
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ 1p
Funcţia f este bijectivă deoarece există funcţia $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f^{-1}(x) = e^x$ 1p
astfel încât $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}_+^*}$ şi $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$ 1p
sau
Verificarea injectivităţii 1p
Verificarea surjectivităţii 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Aplicăm criteriul raportului, calculând limita

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 a^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^2 a^n} = \frac{a}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{a}{5}.$$

.... (1p)

- Dacă $\ell = \frac{a}{5} < 1$, adică $a < 5$, atunci seria este convergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = \frac{a}{5} > 1$, adică $a > 5$, atunci seria este divergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = \frac{a}{5} = 1$, adică $a = 5$, atunci termenul general al seriei nu tinde la 0:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty,$$

astfel seria este divergentă. .... (1p)

2. Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ în punctul $a \in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Pentru problema actuală $I = \mathbb{R}$, iar $a = \pi$.

Se calculează derivatele de ordinul 1 şi 2:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad f''(x) = -\frac{1}{2^2}\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

.... (0,5p)

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{sau} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k \\ -\frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k+1 \\ -\frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k+2 \\ \frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}\right), & \text{dacă} \quad n = 4k+3 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

.... (1p)

Se observă că

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n = 2t \\ \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+1}}, & \text{dacă} \quad n = 2t+1 \end{cases}.$$

.... (0,5p)

Astfel polinomul lui Taylor ataşat funcţiei f în punctul $a = \pi$, ştiind că n este impar, deci de forma $n = 2t+1$, este următorul:

$$\begin{aligned} T_{n,\pi}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(x-\pi)^k = \sum_{k=0}^{t} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1} = \\ &= 0 - \frac{1}{2}(x-\pi) + 0 + \frac{1}{2^3\cdot 3!}(x-\pi)^3 + ... + \frac{(-1)^{t+1}}{2^{2t+1}\cdot(2t+1)!}(x-\pi)^{2t+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

.... (0,5p)

3. *a*) Folosim integrarea prin părți:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x\,e^{-x}\,dx = \int x\,(-e^{-x})'\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = \\ &= -x\,e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)\,e^{-x}.\end{aligned}$$

.... (1,0p)

b) Conform punctului *a*),

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x\,e^{-x}}{1+(x+1)e^{-x}}\,dx =$$

.... (1,0p)

$$= -\int_{-1}^{0} \frac{(1+(x+1)e^{-x})'}{1+(x+1)e^{-x}}\,dx = -\ln(1+(x+1)e^{-x})\,\Big|_{-1}^{0} = -\ln 2.$$

.... (1,0p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - septembrie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Mijlocul segmentului $[AB]$ este $P(0,9)$. Ecuaţia medianei cerute este $x + 2y - 18 = 0$ 1p
   b) Mijlocul segmentului $[AC]$ este $N(3,3)$. Mediatoarea cerută are ecuaţia
   $y - 3 = -1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow x + y - 6 = 0$. 1p
   c) Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuaţia $y = 9$. Centrul cercului circumscris se află la intersecţia mediatoarelor. 1p
   Centrul cercului circumscris are coordonatele $(-3, 9)$, deci raza cercului este $R = 3\sqrt{10}$. Ecuaţia cercului este $(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 90$. 1p
   d) Coordonatele centrului de greutate sunt $(2, 8)$ 1p
   Aria triunghiului AGC este egală cu

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}\right| = 18.$$

   .... 1p

2. a) Ecuaţia parabolei este $\mathcal{P} : y^2 = 12x$ 1p
   b) Focarul este $F(3, 0)$, iar directoarea este dreapta $d : x = -3$ 1p
   c) Ecuaţia tangentei la parabolă în punctul A este $6y = 6(x + 3) \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$. 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licenţă septembrie 2023
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1.	**2p**
a) Definitie clasa de baza (constructor, metode, acces la date).........................	1 p
b) Definitie clasa derivata StudentBursier(mostenire, constructor, metoda)......	1 p
2.	**2p**
Creare vector...	1p
Sortare vector...	1p
3.	**2p**
Secventa filtrare (iterare elemente, comparatii , actualizare rezultat)	2p
4.	**2p**
Indicarea corecta a obiectului ce se afiseaza...	2p
5.	**1p**
Explicarea teoretica	0.5p
Exemplificare..	0.5p

Notă:
(1p) Oficiu