Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(5 puncte)**
   a) Să se arate că $38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ este subgrup în grupul $(\mathbb{Z}, +)$.
   Este şi subinel în inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?
   b) Să se arate că $38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$ nu este subgrup în grupul $(\mathbb{Z}, +)$.
   c) Să se determine o pereche $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât $38a + 24b = 2$.
   Deduceţi că $38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

2. **(4 puncte)** Fie
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x - y, x + z).$$
   a) Să se arate că f este o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale.
   b) Să se scrie matricea transformării liniare f în perechea formată din bazele canonice.
   c) Formează vectorii $f(1, 2, 0)$ şi $f(0, 1, 2)$ o bază în codomeniu? Justificare.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(2 puncte)** Determinaţi limita şirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 2}$, având termenul general
$$x_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{1 + \sqrt{2!} + \ldots + \sqrt[n]{n!}}, \quad \forall n \geq 2.$$

2. **(2 puncte)** Studiaţi prin discuţie după parametrul real $a > 0$, natura seriei de numere reale cu termeni pozitivi:
$$\sum_{n\geq 1} \left(a \cdot \frac{n^2 - n + 3}{n^2} \right)^n .$$

3. **(2 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de gradul $n \in \mathbb{N}$ ataşat funcţiei
$$f : (2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - 2) \ln(x - 2)$$
   în punctul $a = 3$.

4. **(3 puncte)** Considerăm funcţia
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^x}}.$$
   a) Să se calculeze $f(2)$.
   b) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{2}$ pentru orice $x \in [0, 2)$.

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(2 puncte)** Determinaţi ecuaţia planului care trece prin punctul $M(1,-2,1)$ şi este perpendicular pe dreapta
$$d : \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$$

2. **(3 puncte)** Determinaţi distanţa dintre dreptele
$$d_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ şi } d_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

3. **(2 puncte)** Să se scrie ecuaţia elipsei, dacă se ştie că axele de simetrie ale elipsei sunt axele de coordonate, distanţa focala este 10, iar lungimea axei mici este 24.

4. **(2 puncte)** Fie $M(x_0, y_0)$ un punct pe parabola $y^2 = 2x$. Tangenta dusă în M la parabolă intersectează axa Oy în punctul N.

   a) Să se determine coordonatele centrului de greutate G al triunghiului OMN, unde $O(0,0)$ este originea sistemului de coordonate.

   b) Să se demonstreze că paralela dusă prin punctul N la axa Ox trece prin punctul G.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) Se aplică teorema de caracterizare a subgrupului:
$0 \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ şi pentru orice $a, b \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ avem $a, b \in 38\mathbb{Z}$ şi $a, b \in 24\mathbb{Z}$.................. 0.5p
Varianta 1: Din $38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ avem $a - b \in 38\mathbb{Z}$ şi $a - b \in 24\mathbb{Z}$, deci $a - b \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 1p
Varianta 2:
Din $38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ avem $a + b \in 38\mathbb{Z}$ şi $a + b \in 24\mathbb{Z}$, deci $a + b \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 0.5p
Din $38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ avem $-a \in 38\mathbb{Z}$ şi $-a \in 24\mathbb{Z}$, deci $-a \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 0.5p
Subgrupul aditiv $38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ este şi subinel în $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ el fiind închis în raport cu înmulţirea.
Mai precis $38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z}$ fiind subinele în $\mathbb{Z}$ avem $ab \in 38\mathbb{Z}$ şi $ab \in 24\mathbb{Z}$, deci $ab \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 0.5p
Observaţie: Verificarea completă a proprietăţilor din teorema de caracterizare se poate face şi folosind proprietăţi ale divizibilităţii numerelor întregi (de exemplu, suma, diferenţa, produsul a doi multipli de 38 sunt, de asemenea, multipli de 38).

b) Mulţimea $38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$ nu este subgrup în $(\mathbb{Z}, +)$, ea nefiind parte stabilă în raport cu adunarea.
De exemplu $38, 24 \in 38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$, dar $38 + 24 = 62 \notin 38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$................................. 1p

c) Se aplică algoritmul lui Euclid:
$38 = 1 \cdot 24 + 14$
$24 = 1 \cdot 14 + 10$
$14 = 1 \cdot 10 + 4$
$10 = 2 \cdot 4 + 2$ (şi $4 = 2 \cdot 2 + 0$)
De aici $2 = 10 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 14 = 3 \cdot 24 - 5 \cdot 14 = 8 \cdot 24 - 5 \cdot 38$
Deci putem lua $a = -5$, $b = 8$.. 1p
Din $2 = 38a + 24b$ rezultă că $2k = 38ak + 24bk \in 38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$,
prin urmare $2\mathbb{Z} \subseteq 38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$ 0.5p
Avem şi $38k + 24l = 2(19k + 12l) \in 2\mathbb{Z}$, pentru orice $k, l \in \mathbb{Z}$, deci $38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$ 0.5p

2. a) f este transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale pentru că:
Varianta 1: f este aditivă, deoarece pentru orice $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ avem
$f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') = (x + x' - (y + y'), x + x' + z + z') =$
$= (x - y, x + z) + (x' - y', x' + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$ 1p
f este $\mathbb{R}$-omogenă, deoarece pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avem
$f(a(x, y, z)) = f(ax, ay, az) = (ax - ay, ax + az) = a(x - y, x + z) = af(x, y, z)$............... 1p
Varianta 2: Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ avem
$f(a(x, y, z) + b(x', y', z')) = f(ax + bx', ay + by', az + bz') = (ax + bx' - (ay + by'), ax + bx' + az + bz') =$
$= a(x - y, x + z) + b(x' - y', x' + z') = af(x, y, z) + bf(x', y', z')$ 2p

b) **Varianta 1:** Calculăm $f(1, 0, 0) = (1, 1), f(0, 1, 0) = (-1, 0), f(0, 0, 1) = (0, 1)$, de unde matricea lui f în perechea formată din bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p
Varianta 2: Din $f(x, y, z)^t = \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, avem că matricea lui f relativ la bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

c) Avem $f(1, 2, 0) = (-1, 1)$ şi $f(0, 1, 2) = (-1, 2)$, iar aceşti vectori sunt liniar independenţi pentru că $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, deci formează a bază în spaţiul bidimensional ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. $\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}) \geq \lim_{n\to\infty} n = +\infty$ .... (0,5p)

Aplicăm lema lui Stolz-Cesàro și o consecință a ei: .... (0,5p)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\ldots+n+(n+1))-(1+2+\ldots+n)}{(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}+\sqrt[n+1]{(n+1)!})-(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!})} =$$

.... (0,5p)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

.... (0,5p)

2. Utilizăm criteriul rădăcinii:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(a\cdot\frac{n^2-n+3}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a\cdot\frac{n^2-n+3}{n^2} = a.$$

.... (0,5p)

- Dacă $\ell = a < 1$, atunci seria este convergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = a > 1$, atunci seria este divergentă; .... (0,5p)
- dacă $\ell = a = 1$, atunci termenul general al seriei nu tinde la 0:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3-n}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3-n}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3-n}\cdot\frac{3-n}{n^2}\cdot n} =$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{n^2}\cdot n} = e^{-1} \neq 0,$$

deci seria este divergentă. .... (0,5p)

3. Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ şi unui punct $a \in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Pentru problema actuală $I = (2,\infty)$, iar $a = 3$.

Derivata de ordinul 1 a funcţiei f este

$$f'(x) = \ln(x-2) + 1,$$

astfel concluzionăm că derivata de ordin $n \geq 2$ a funcţiei f este

$$f^{(n)}(x) = \ln^{(n-1)}(x-2).$$

.... (0,5p)

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că pentru oricare $n \geq 1$

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^{-n}.$$

Astfel, pentru oricare $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-2}(n-2)!(x-2)^{-(n-1)}.$$

.... (0,5p)

Remarcăm faptul că

$$f(3) = 0, \quad f'(3) = 0 + 1 = 1,$$

astfel

$$T_{n,a}f(x) = 1(x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = (x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-2}(k-2)!}{k!}(3-2)^{-(k-1)}(x-3)^k =$$

$$= (x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)k}(x-3)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

4. *a*) Folosim calculul limitelor unor şiruri cu ajutorul integralei Riemann, adică pentru $f \in C[0,1]$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

.... (0,5p)

$$f(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

.... (0,5p)

$$= \sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

.... (1,0p)

b) Fixăm o valoare $x \in [0,2)$. Deoarece $\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k^x} \leq \sqrt{n^2+n^x}$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, avem

$$\frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

iar după însumare

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+1}},$$

.... (0,5p)

de unde

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}} \Longrightarrow \frac{n+1}{2n\sqrt{1+n^{x-2}}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{n+1}{2n\sqrt{1+n^{-2}}}.$$

Trecând la limită după n ($n \to \infty$), obținem că $f(x) = \frac{1}{2}$, deoarece $x \in [0,2)$.

.... (0,5p)

Soluție alternativă pentru punctul b).
Fixăm o valoare $x \in [0,2)$. Deoarece $n = \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2+k^x} \leq \sqrt{n^2+n^x}$ pentru orice $k = 1,2,\ldots,n$, avem

$$\frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{k}{n}, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

iar după însumare

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.$$

.... (0,5p)

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{şi}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{1+n^{x-2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^{x-2}}} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2},$$

prin teorema cleștelui avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} = \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in [0,2).$$

.... (0,5p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. Un vector director $\vec{d}$ al dreptei d este $\vec{d}(1,2,3)$.. 1p

   Ecuaţia planului este $1(x-1)+2(y+2)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=0$ 1p

2. **Varianta 1.** $M_1(-7,-4,-3) \in d_1$, $M_2(21,-5,2) \in d_2$, deci $\overrightarrow{M_1M_2}(28,-1,5)$ 1p

   $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d_1}, \vec{d_2}) = \begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 169$ 1p

   $\vec{d_1} \times \vec{d_2} = -12\vec{i} - 9\vec{j} - 36\vec{k}$, $d(d_1,d_2) = \dfrac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{d_1}, \vec{d_2})|}{||\vec{d_1} \times \vec{d_2}||} = 13$ 1p

   Varianta 2. Fie α planul ce conţine dreapta d_1 şi este paralel cu dreapta d_2:

   $$\alpha : \begin{vmatrix} x+7 & y+4 & z+3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+7)(-12)-(y+4)9+(z+3)(-36)=0 \Leftrightarrow$$

   $\Leftrightarrow \alpha : 4x+3y+12z+76=0$ 1p

   Fie $M_2(21,-5,2) \in d_2$, atunci $d(d_1,d_2) = d(M_2,\alpha)$ 1p

   $d(M_2,\alpha) = \dfrac{|4 \cdot 21 + 3 \cdot (-5) + 12 \cdot 2 + 76|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = \dfrac{169}{13} = 13.$ 1p

3. $2c=10 \Rightarrow c=5$, $2b=24 \Rightarrow b=12$ 1p

   $a^2=b^2+c^2=169$ 0.5p

   Ecuaţia elipsei: $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1.$ 0.5p

4. Ecuaţia tangentei: $yy_0 = x + x_0 \Rightarrow N(0, \frac{x_0}{y_0})$ 0.5p

   a) coordonatele lui G sunt: $x_G = \dfrac{x_0}{3}$, $y_G = \dfrac{y_0 + \frac{x_0}{y_0}}{3} = \dfrac{y_0^2 + x_0}{3y_0}$ 0.5p

   b) punctul M_0 se află pe parabolă, deci $y_0^2 = 2x_0$. Astfel $y_G = \dfrac{2x_0 + x_0}{3y_0} = \dfrac{x_0}{y_0} = y_N$, deci paralela prin N la Ox trece prin G 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.