Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Matematika szak

I TÉTEL. Algebra

1. **(5 pont)**
   a) Igazoljuk, hogy $38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ részcsoport a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportban.
   Részgyűrű-e a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrűben?
   b) Igazoljuk, hogy $38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$ nem részcsoport a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportban.
   c) Határozzunk meg egy $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ számpárt úgy, hogy $38a + 24b = 2$.
   Vezessük le, hogy $38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

2. **(4 pont)** Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, x + z)$.
   a) Igazoljuk, hogy f egy $\mathbb{R}$-lineáris függvény.
   b) Írjuk fel f mátrixát a kanonikus bázispárra nézve.
   c) Az $f(1, 2, 0)$ és $f(0, 1, 2)$ vektorok bázist alkotnak-e az értékkészlet térben? Indoklás.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(2 pont)** Határozzuk meg az $(x_n)_{n\geq 2}$ valós számsorozat határértékét, amelynek általános tagja
$$x_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{1 + \sqrt{2!} + \ldots + \sqrt[n]{n!}}, \quad \forall n \geq 2.$$

2. **(2 pont)** Az $a > 0$ valós paraméter függvényében tanulmányozzuk a következő pozitív tagú valós számsor természetét:
$$\sum_{n\geq 1} \left(a \cdot \frac{n^2 - n + 3}{n^2} \right)^n .$$

3. **(2 pont)** Írjuk fel az
$$f : (2, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - 2) \ln(x - 2)$$
függvény n-edrendű Taylor-féle polinomját az $a = 3$ pontban!

4. **(3 pont)** Tekintsük az
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^x}}$$
függvényt.
   a) Számítsuk ki az $f(2)$ értékét!
   b) Mutassuk meg, hogy $f(x) = \frac{1}{2}$, minden $x \in [0, 2)$ esetén!

III. TÉTEL. Geometria

1. **(2 pont)** Határozzuk meg az $M(1,-2,1)$ ponton áthaladó és a $d : \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$ egyenesre merőleges síkot.

2. **(3 pont)** Számítsuk ki a d_1 és d_2 egyenesek közti távolságot, ahol

$$d_1 : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ és } d_2 : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

3. **(2 pont)** Írjuk fel annak az ellipszisnek az egyenletét, amelynek szimmetriatengelyei a koordinátatengelyek, a fókuszpontjai közti távolság 10, valamint a kistengelyének hosszúsága 24.

4. **(2 pont)** Legyen $M(x_0, y_0)$ egy pont az $y^2 = 2x$ parabolán. A parabola M ponthoz tartozó érintője metszi az Oy tengelyt egy N pontban.

   a) Határozzuk meg az OMN háromszög G súlypontjának koordinátáit, ahol $O(0,0)$ a koordinátarendszer origója.

   b) Igazoljuk, hogy az N ponton át az Ox tengellyel párhuzamos egyenes áthalad a G ponton.

MEGJEGYZÉS.

Minden tétel kötelező. Minden feladathoz teljes megoldás megadása szükséges.
Minden tétel esetén jár **1 pont** hivatalból. A legkisebb átmenő jegy 5,00.
A munkaidő 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Matematika szak
Javítókulcs

I TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) Részcsoportok jellemzési tételét alkalmazzuk:
$0 \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ és ha $a, b \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ tetszőleges, akkor $a, b \in 38\mathbb{Z}$ és $a, b \in 24\mathbb{Z}$ 0.5p
1. Módszer: $38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$-ből $a - b \in 38\mathbb{Z}$ és $a - b \in 24\mathbb{Z}$, tehát $a - b \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 1p
2. Módszer:
$38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$-ből $a + b \in 38\mathbb{Z}$ és $a + b \in 24\mathbb{Z}$, tehát $a + b \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 0.5p
$38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$-ből $-a \in 38\mathbb{Z}$ és $-a \in 24\mathbb{Z}$, tehát $-a \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 0.5p
A $38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ additív részcsoport részgyűrű is a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrűben, mivel zárt a szorzásra nézve.
Pontosabban, mivel $38\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z}$ részgyűrűk $\mathbb{Z}$-ben, $ab \in 38\mathbb{Z}$ és $ab \in 24\mathbb{Z}$, tehát $ab \in 38\mathbb{Z} \cap 24\mathbb{Z}$ 0.5p
Megjegyzés: A fenti ellenőrzéseknél fel lehet használni az oszthatósági tulajdonságokat is (pld. 38-al osztható számok összege, különbsége, szorzata osztható 38-al).

b) $38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$ nem részcsoport a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportban, mivel nem zárt az összeadásra nézve.
Például $38, 24 \in 38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$, de $38 + 24 = 62 \notin 38\mathbb{Z} \cup 24\mathbb{Z}$ 1p

c) Kiterjesztett euklidészi algoritmust alkalmazva:
$38 = 1 \cdot 24 + 14$
$24 = 1 \cdot 14 + 10$
$14 = 1 \cdot 10 + 4$
$10 = 2 \cdot 4 + 2$ (şi $4 = 2 \cdot 2 + 0$)
Innen $2 = 10 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 14 = 3 \cdot 24 - 5 \cdot 14 = 8 \cdot 24 - 5 \cdot 38$
Tehát például $a = -5$, $b = 8$ 1p
$2 = 38a + 24b$-ből $2k = 38ak + 24bk \in 38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$, minden $k \in \mathbb{Z}$-re,
tehát $2\mathbb{Z} \subseteq 38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z}$ 0.5p
De $38k + 24l = 2(19k + 12l) \in 2\mathbb{Z}$, minden $k, l \in \mathbb{Z}$-re, tehát $38\mathbb{Z} + 24\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$........ 0.5p

2. a) Az f függvény $\mathbb{R}$-lineáris mert:
1. Módszer: f additív, hiszen ha $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges, akkor
$f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') = (x + x' - (y + y'), x + x' + z + z') =$
$= (x - y, x + z) + (x' - y', x' + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$ 1p
f $\mathbb{R}$-homogén, hiszen ha $a \in \mathbb{R}$ és $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges, akkor
$f(a(x, y, z)) = f(ax, ay, az) = (ax - ay, ax + az) = a(x - y, x + z) = af(x, y, z)$........ 1p
2. Módszer: Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tetszőleges, akkor
$f(a(x, y, z) + b(x', y', z')) = f(ax + bx', ay + by', az + bz') = (ax + bx' - (ay + by'), ax + bx' + az + bz') =$
$= a(x - y, x + z) + b(x' - y', x' + z') = af(x, y, z) + bf(x', y', z')$ 2p

b) **1. Módszer:** $f(1, 0, 0) = (1, 1), f(0, 1, 0) = (-1, 0), f(0, 0, 1) = (0, 1)$, ahonnan f mátrixa a kanonikus bázispárra nézve $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

2. Módszer: $f(x, y, z)^t = \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ahonnan f mátrixa a kanonikus bázispárra nézve $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

c) $f(1, 2, 0) = (-1, 1)$ şi $f(0, 1, 2) = (-1, 2)$, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, hiszen $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, tehát az alternatíva tétel alapján bázist alkotnak az $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós valós térben 1p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. $\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}) \geq \lim_{n\to\infty} n = +\infty$ .... (0,5p)

Alkalmazzuk a Stolz-Cesàro–tételt és egy következményét: .... (0,5p)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+\ldots+n+(n+1))-(1+2+\ldots+n)}{(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!}+\sqrt[n+1]{(n+1)!})-(1+\sqrt{2!}+\ldots+\sqrt[n]{n!})} =$$

.... (0,5p)

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

.... (0,5p)

2. A gyökkritériumot használjuk:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(a\cdot\frac{n^2-n+3}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a\cdot\frac{n^2-n+3}{n^2} = a.$$

.... (0,5p)

- Ha $\ell = a < 1$, akkor a sor konvergens;... (0,5p)
- ha $\ell = a > 1$, akkor a sor divergens;.. (0,5p)
- ha $\ell = a = 1$, akkor a sor általános tagja nem tart a 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+3}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3-n}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3-n}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3-n}\cdot\frac{3-n}{n^2}\cdot n} =$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3-n}{n^2}\cdot n} = e^{-1} \neq 0,$$

ezért a sor divergens. .... (0,5p)

3. Az $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-szer deriválható függvény n-edrendű Taylor-féle polinomja az $a \in I$ pontban a $T_{n,a}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

polinomfüggvény. .... (0,5p)

Jelen feladat esetén $I = (2,\infty)$ és $a = 3$.

Az f függvény elsőrendű deriváltja:

$$f'(x) = \ln(x-2) + 1,$$

ahonnan következik, hogy $n \geq 2$ esetén az f függvény n-edrendű deriváltja

$$f^{(n)}(x) = \ln^{(n-1)}(x-2).$$

.... (0,5p)

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x-2)^{-n}.$$

Így minden $n \geq 2$ esetén

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-2}(n-2)!(x-2)^{-(n-1)}.$$

.... (0,5p)

Megjegyezzük, hogy

$$f(3) = 0, \quad f'(3) = 0 + 1 = 1,$$

tehát

$$T_{n,a}f(x) = 1(x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k = (x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-2}(k-2)!}{k!}(3-2)^{-(k-1)}(x-3)^k =$$

$$= (x-3) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)k}(x-3)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

4. *a*) A sorozat határértékét Riemann integrál segítségével fogjuk kiszámolni, felhasználva, hogy minden $f \in C[0,1]$ függvény esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

.... (0,5p)

Ekkor az $f(2)$ értéke:

$$f(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx =$$

.... (0,5p)

$$= \sqrt{1+x^2}\,\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

.... (1,0p)

b) Rögzítünk egy $x \in [0,2)$ értéket. Mivel $\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k^x} \leq \sqrt{n^2+n^x}$, minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén, ezért

$$\frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ahonnan összegzéssel kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+n^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+1}},$$

.... (0,5p)

tehát

$$\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+n^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n^2+1}},$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{n+1}{2n\sqrt{1+n^{x-2}}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^x}} \leq \frac{n+1}{2n\sqrt{1+n^{-2}}}.$$

Határértékre térve n szerint ($n \to \infty$) a fogó tétel alapján adódik, hogy $f(x) = \frac{1}{2}$, mivel $x \in [0, 2)$.

.... (0,5p)

Alternatív megoldás a b) alponthoz.

Rögzítünk egy $x \in [0, 2)$ értéket. Mivel $n = \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2 + k^x} \leq \sqrt{n^2 + n^x}$, minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén, ezért

$$\frac{k}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^x}} \leq \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ahonnan összegzéssel kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$$

$$\iff \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^x}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}.$$

.... (0,5p)

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \int_0^1 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{és}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + n^x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{1 + n^{x-2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + n^{x-2}}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

ezért a fogótétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^x}} = \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in [0, 2).$$

.... (0,5p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. A d egyenes egy irányvektora $\vec{d}(1,2,3)$ 1p

A sík egyenlete: $1(x-1)+2(y+2)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=0$ 1p

2. **1. Módszer** $M_1(-7,-4,-3)\in d_1$, $M_2(21,-5,2)\in d_2$, tehát $\overrightarrow{M_1M_2}(28,-1,5)$ 1p

$(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{d_1},\vec{d_2})=\begin{vmatrix} 28 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}=-3\cdot 169$ 1p

$\vec{d_1}\times\vec{d_2}=-12\vec{i}-9\vec{j}-36\vec{k}$, $d(d_1,d_2)=\dfrac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{d_1},\vec{d_2})|}{||\vec{d_1}\times\vec{d_2}||}=13$ 1p

2. Módszer. Legyen α az a sík, amely tartalmazza a d_1 egyenest és párhuzamos a d_2 egyenessel:

$$\alpha:\begin{vmatrix} x+7 & y+4 & z+3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+7)(-12)-(y+4)9+(z+3)(-36)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha: 4x+3y+12z+76=0$ 1p

Legyen $M_2(21,-5,2)\in d_2$, ekkor $d(d_1,d_2)=d(M_2,\alpha)$ 1p

$d(M_2,\alpha)=\dfrac{|4\cdot 21+3\cdot(-5)+12\cdot 2+76|}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}}=\dfrac{169}{13}=13.$ 1p

3. $2c=10\Rightarrow c=5$, $2b=24\Rightarrow b=12$ 1p

$a^2=b^2+c^2=169$ 0.5p

Az ellipszis egyenlete: $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$. 0.5p

4. Az érintő egyenlete: $yy_0=x+x_0\Rightarrow N(0,\frac{x_0}{y_0})$ 0.5p

a) $x_G=\dfrac{x_0}{3}$, $y_G=\dfrac{y_0+\frac{x_0}{y_0}}{3}=\dfrac{y_0^2+x_0}{3y_0}$ 0.5p

b) Az M_0 rajta van a parabolán, tehát $y_0^2=2x_0$. Így $y_G=\dfrac{2x_0+x_0}{3y_0}=\dfrac{x_0}{y_0}=y_N$, tehát az N ponton át az Ox tengellyel húzott párhuzamos áthalad a G ponton. 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.