Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică informatică

SUBIECTUL I. Algebră

1. **(3 puncte)**
   a) Rezolvaţi ecuaţia $\widehat{4}x + \widehat{10} = \widehat{6}$ în $\mathbb{Z}_{12}$.
   b) Are grupul $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ subgrupuri cu 8 elemente? Justificare.
2. **(6 puncte)** Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$.
   a) Arătaţi că f este o transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale.
   b) Să se scrie matricea transformării liniare f în perechea formată din bazele canonice.
   c) Sunt vectorii $f(1, 1), f(1, -1)$ liniar independenţi în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$? Justificare.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. **(3 puncte)** Studiaţi natura următoarei serii de numere reale cu termeni pozitivi:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n (n!)^3}{(3n)!}.$$
2. **(3 puncte)** Scrieţi polinomul lui Taylor de gradul $n \in \mathbb{N}$, unde n este impar, ataşat funcţiei
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$
   în punctul $a = 6\pi$.
3. **(3 puncte)** Considerăm funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.
   a) Să se arate că orice primitivă a lui f este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.
   b) Să se calculeze valoarea integralei
$$\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+2}\, f(x) + \frac{x+2}{x+1}\, f(x+1)\right) dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. **(6 puncte)** Se dau punctele $A(1, 2), B(5, -1)$ şi $C(8, 3)$.
   a) Să se scrie ecuaţia dreptei AG, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.
   b) Să se scrie ecuaţia perpendicularei din B pe AG.
   c) Să se demonstreze că punctele A, B, C pot fi vârfurile unui pătrat.
   d) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC.
2. **(3 puncte)** Determinaţi ecuaţia dreptei tangente la parabola $y^2 = 16x$ şi care este perpendiculară pe dreapta $d : 4x + 2y - 7 = 0$.

SUBIECTUL IV. Informatică

Notă pentru subiectul de Informatică:
Pentru rezolvarea problemelor 1 și 2 poate fi folosit unul din limbajele de programare C++, Python, Java sau C#.
Se va indica limbajul de programare folosit.
Pentru soluțiile oferite se pot folosi biblioteci existente (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 puncte)** Scrieți un program care:
   a) Implementează o clasă ***FormaGeometrica*** care are un constructor cu parametri şi următoarele atribute / metode:
   - ***string nume*** – atribut protejat, reprezintă numele formei geometrice
   - ***double aria()*** – metodă abstractă care calculează aria formei geometrice (implementată specific în clasele derivate)

   b) Implementează două clase derivate din clasa ***FormaGeometrica***:
   - clasa ***Patrat*** va avea un constructor care primeşte numele şi latura pătratului şi o metodă ***aria()*** care calculează aria pătratului
   - clasa ***Cerc*** va avea un constructor care primeşte numele şi raza cercului şi o metodă ***aria()*** care calculează aria cercului.

2. **(2 puncte)** Creaţi un vector de obiecte ***FormaGeometrica*** care să conţină trei obiecte, dintre care cel puţin unul să fie de tip ***Patrat*** si unul de tip ***Cerc***. Scrieţi o secvență de cod care afişează toate formele geometrice din vector care au aria mai mare decât o valoare dată.

3. **(2 puncte)** Scrieţi liniile de cod lipsă din următoarea funcţie care sortează un vector de obiecte ***FormaGeometrica*** în ordine crescătoare a ariei.

```
void sorting(vector<FormaGeometrica*> v) {
   bool ok = 0;
   while (!ok) {
      ...
    }
}
```

4. **(2 puncte)** Precizaţi ce se afişează în urma executării secvenţei de instrucţiuni de mai jos, știind că funcţia *push_back()* inserează un element la finalul vectorului iar funcția *back()* returnează o referinţă la ultimul element al vectorului.

```
....
int main()
{
      vector<FormaGeometrica*> v;
      v.push_back(new Cerc("cerc1", 2.0));
      v.push_back(new Patrat("patrat1", 4.0));
      if (v.back()->aria() > 14) v.push_back(new Patrat("patrat2", 5.0));
     cout << v.back()->aria();
     return 0;
}
```

5. **(1 punct)** Care este complexitatea în cel mai rău caz pentru algoritmul de căutare binară? Justificați răspunsul.

NOTĂ.

Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
Pentru fiecare subiect se acordă **1 punct** din oficiu. Nota minimimă ce asigură promovarea este 5,00.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) **Varianta 1:** Ecuaţia ia forma $\widehat{4}x = -\widehat{4} = \widehat{8}$.
   Înlocuind pe x cu elementele lui $\mathbb{Z}_{12}$ obţinem că soluţiile ecuaţiei sunt $x = \widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}$ 2p
   Varianta 2: Ecuaţia mai poate fi scrisă $\widehat{4}(x+\widehat{1}) = \widehat{0}$, de unde rezultă că $x+\widehat{1}$ este clasa din $\mathbb{Z}_{12}$ a unui multiplu de 3, adică $x+\widehat{1} \in \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}\}$ sau, echivalent, $x \in \{\widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}\}$ 2p
   b) Conform teoremei lui Lagrange pentru un subgrup H al grupului $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, avem $|H| \mid 12$, deci, din cauză că $8 \nmid 12$, nu putem avea niciun subgrup cu 8 elemente în $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ 1p

2. a) f este transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale pentru că:
   Varianta 1: f este aditivă, deoarece pentru orice $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ avem
   $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = (x+x'+y+y', x+x'-(y+y'), y+y') =$
   $= (x+y, x-y, y) + (x'+y', x'-y', y') = f(x,y) + f(x',y')$ 1p
   f este $\mathbb{R}$-omogenă, deoarece pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avem
   $f(a(x,y)) = f(ax, ay) = (ax+ay, ax-ay, ay) = a(x+y, x-y, y) = af(x,y)$ 1p
   Varianta 2: Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ avem
   $f(a(x,y)+b(x',y')) = f(ax+bx', ay+by') = (ax+bx'+ay+by', ax+bx'-(ay+by'), ay+by') =$
   $= a(x+y, x-y, y) + b(x'+y', x'-y', y') = af(x,y) + bf(x',y')$ 2p
   b) **Varianta 1:** Calculăm $f(1,0) = (1,1,0), f(0,1) = (1,-1,1)$, ... 1p
   de unde matricea lui f relativ la bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p
   Varianta 2: Din $f(x,y)^t = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ... 1p
   avem că matricea lui f relativ la bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p
   c) Avem $f(1,1) = (2,0,1)$ şi $f(1,-1) = (0,2,-1)$, ... 1p
   iar aceşti vectori sunt liniar independenţi, pentru că rangul matricei $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ este 2 .... 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Aplicăm criteriul raportului, calculând limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left((n+1)!\right)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{3^n(n!)^3}=$$

.... (1p)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

.... (1p)

Deoarce $\frac{1}{9}<1$, seria este convergentă. .... (1p)

2. Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f:I\to\mathbb{R}$ în punctul $a\in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Pentru problema actuală $I=\mathbb{R}$, iar $a=6\pi$.

Se calculează derivatele de ordinul 1 şi 2:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right),\quad f''(x)=-\frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

.... (0,5p)

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{sau}\quad f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k\\ \frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k+1\\ -\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k+2\\ -\frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k+3\end{cases},\quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

.... (1p)

Se observă că

$$f^{(n)}(6\pi)=\begin{cases}0, & \text{dacă}\quad n=2t\\ \frac{(-1)^t}{3^{2t+1}}, & \text{dacă}\quad n=2t+1\end{cases}.$$

.... (0,5p)

Astfel polinomul lui Taylor ataşat funcţiei f în punctul $a=6\pi$, ştiind că n este impar, deci de forma $n=2t+1$, este următorul:

$$\begin{aligned}T_{n,6\pi}f(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(6\pi)}{k!}(x-6\pi)^k=\sum_{k=0}^{t}\frac{(-1)^k}{3^{2k+1}(2k+1)!}(x-6\pi)^{2k+1}=\\&=0+\frac{1}{3}(x-6\pi)+0-\frac{1}{3^3\cdot 3!}(x-6\pi)^3+\ldots+\frac{(-1)^t}{3^{2t+1}\cdot(2t+1)!}(x-6\pi)^{2t+1},\quad\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

.... (0,5p)

3. $a)$ Dacă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă arbitrară a funcției f, atunci $F'(x)=f(x)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

.... (0,5p)

Deoarece $F'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, rezultă că F este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

.... (0,5p)

$b)$

$$\int_0^1\left(\frac{x+1}{x+2}\,f(x)+\frac{x+2}{x+1}\,f(x+1)\right)dx=\int_0^1\left(\frac{\ln(x+1)}{x+2}+\frac{\ln(x+2)}{x+1}\right)dx=$$

.... (1,0p)

Aplicăm integrarea prin părți:

$$=\ln(x+1)\,\ln(x+2)\,\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(x+2)}{x+1}\,dx+\int_0^1\frac{\ln(x+2)}{x+1}\,dx=\ln 2\cdot\ln 3.$$

.... (1,0p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Coordonatele centrului de greutate sunt $\left(\frac{1+5+8}{3}, \frac{2-1+3}{3}\right)$. Avem aşadar $G\left(\frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
   Ecuaţia dreptei $AG : 2x + 11y - 24 = 0$ 1p

   b) Panta dreptei AG este $-\frac{2}{11}$, deci panta dreptei l_B pe care o căutăm este $\frac{11}{2}$. Ecuaţia dreptei căutate este $l_B : y + 1 = \frac{11}{2}(x - 5)$ 1p

   c) Calculăm pătratele lungimilor laturilor
   $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ şi $AC^2 = 7^2 + 1^2 = 50$. 1p
   Cum $AB = BC$ şi $AB^2 + BC^2 = AC^2$, deducem că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AC, de unde rezultă concluzia 1p

   d) Triunghiul ABC fiind dreptunghic, centrul cercului este mijlocul ipotenuzei $[AC]$, adică punctul de coordonate $\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$. 1p
   Raza cercului este $R = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Ecuaţia cercului cerut este $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$. 1p

2. Fie t tangenta cerută.

   Varianta 1. Panta acestei drepte este $m_t = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{2}$, astfel ecuaţia tangentei se poate scrie în forma $d : y = \frac{1}{2}x + n$. 1p

   Dreapta t este tangentă la parabola dacă şi numai dacă $|t \cap \mathcal{P}| = 1$. Aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă sistemul alcătuit din ecuaţia dreptei şi ecuaţia parabolei are soluţie unică. Eliminând pe y, ultima condiţie este echivalentă cu faptul că ecuaţia de gradul doi $\left(\frac{1}{2}x + n\right)^2 = 16x$ are o singură soluţie. 1p

   $\Delta = 0 \Leftrightarrow (n - 16)^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 8$, deci ecuaţia tangentei este: $y = \frac{1}{2}x + 8$. 1p

   Varianta 2. Ecuaţia tangentei într-un punct $M(x_0, y_0)$ al parabolei este $yy_0 = 8(x + x_0)$, deci panta tangentei este $m_t = \frac{8}{y_0}$. 1p

   Pe de altă parte, panta tangentei $m_t = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{2}$. Deci $y_0 = 16$. 1p

   Punctul M fiind pe parabolă, avem: $y_0^2 = 16x_0 \Leftrightarrow x_0 = 16$, adică $M(16, 16)$. Astfel ecuaţia tangentei este: $16y = 8(x + 16) \Leftrightarrow x - 2y + 16 = 0$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licență iulie 2023
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1.	**2p**
a) Definitie clasa de baza (constructor, metode, acces la date)........................	1p
b) Definitie clase derivate (mostenire, constructor, metode)...........................	1p
2.	**2p**
Creare vector..	1p
Filtrare vector...	1p
3.	**2p**
Secventa sortare (iterare elemente, comparatii, actualizare variabile)	2p
4.	**2p**
Indicarea corecta a valorii ce se afiseaza..	2p
5.	**1p**
Indicarea complexitatii..	0.5p
Justificarea raspunsului..	0.5p

Notă:
(1p) Oficiu