Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Informatikai matematika szak

I TÉTEL. Algebra

1. **(3 pont)**
   a) Oldjuk meg a $\widehat{4}x + \widehat{10} = \widehat{6}$ egyenletet $\mathbb{Z}_{12}$-ben.
   b) Léteznek-e a $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ csoportnak 8 elemű részcsoportjai? Indoklás.
2. **(6 pont)** Tekintsük az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$ függvényt.
   a) Igazoljuk, hogy f egy valós vektorterek közötti lineáris transzformáció.
   b) Írjuk fel az f lineáris transzformáció mátrixát a kanonikus bázispárra vonatkozóan.
   c) Lineárisan függetlenek-e az $f(1, 1), f(1, -1)$ vektorok az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben? Indoklás.

II. TÉTEL. Matematikai analízis

1. **(3 pont)** Tanulmányozzuk a következő pozitív tagú valós számsor természetét:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n (n!)^3}{(3n)!}.$$
2. **(3 pont)** Írjuk fel az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$
függvény n-edrendű (n páratlan) Taylor-féle polinomját az $a = 6\pi$ pontban!
3. **(3 pont)** Tekintsük az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ függvényt.
   a) Mutassuk meg, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon!
   b) Számítsuk ki az
$$\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+2}\, f(x) + \frac{x+2}{x+1}\, f(x+1)\right) dx$$
   határozott integrált!

III. TÉTEL. Geometria

1. **(6 pont)** Adottak az $A(1, 2), B(5, -1)$ és $C(8, 3)$ pontok.
   a) Írjuk fel az AG egyenes egyenletét, ahol G az ABC háromszög súlyontja.
   b) Írjuk fel a B pontból az AG egyenesre húzott merőleges egyenes egyenletét.
   c) Igazoljuk, hogy az A, B, C pontok lehetnek egy négyzet csúcsai.
   d) Írjuk fel az ABC háromszög köré írt kör egyenletét.
2. **(3 pont)** Határozzuk meg az $y^2 = 16x$ parabola azon érintőjét, amely merőleges a $d : 4x + 2y - 7 = 0$ egyenesre.

IV. TÉTEL. Informatika

Az informatika tételre vonatkozó megjegyzés:
Az 1. és 2. feladat megoldásához a C++, Python, Java és C# programozási nyelvek egyike használható.
Meg kell adni a használt programozási nyelvet.
A megoldásokhoz használhatóak a meglévő könyvtárak (C++, Python, Java, C#).

1. **(2 pont)** Írjunk programot, amelyben:
   a) bevezetjük a ***FormaGeometrica*** osztályt, amely rendelkezik egy paraméteres konstruktorral és az alábbi attribútumokkal, illetve metódusokkal:
   - ***string nume*** – védelemmel rendelkező attribútum, amely a geometriai alakzat nevét határozza meg
   - ***double aria()*** – absztrakt metódus, amely a geometriai alakzat területét számolja ki (sajátos módon kell legyen implementálva a származtatott osztályokban)

   b) a ***FormaGeometrica*** osztályból származtatott alábbi két osztályt adjuk meg:
   - a ***Patrat*** osztály egy olyan konstruktorral, amely a négyzet nevét és oldalának hosszát kapja paraméterként, valamint az ***aria()*** metódussal, amely a négyzet területét számolja ki
   - a ***Cerc*** osztály egy olyan konstruktorral, amely a kör nevét és sugarának hosszát kapja paraméterként, valamint az ***aria()*** metódussal, amely a kör területét számolja ki.

2. **(2 pont)** Hozzunk létre egy ***FormaGeometrica*** típusú objektumokból álló vektort, amely tartalmazzon három objektumot. Ezek közül legalább egy legyen ***Patrat*** típusú és egy ***Cerc*** típusú. Írjunk kódrészletet, amely kiírja az összes olyan geometriai alakzatot a vektorból, amelynek a területe nagyobb egy adott értéknél.

3. **(2 pont)** Írjuk meg az alábbi függvényből hiányzó kódrészletet tudva, hogy a függvény egy ***FormaGeometrica*** típusú objektumokból álló vektort rendez a terület szerint növekvő sorrendbe.

```
void sorting(vector<FormaGeometrica*> v) {
   bool ok = 0;
   while (!ok) {
      …
   }
}
```

4. **(2 pont)** Adjuk meg, hogy mi jelenik meg a kimeneten az alábbi kódrészlet végrehajtásakor, tudva, hogy a *push_back()* függvény egy elemet szúr be a vektor végére, és a *back()* függvény egy referenciát térít vissza a vektor utolsó elemére.

```
….
int main()
{
       vector<FormaGeometrica*> v;
       v.push_back(new Cerc("cerc1", 2.0);
       v.push_back(new Patrat("patrat1", 4.0);
       if (v.back()->aria() > 14) v.push_back(new Patrat("patrat2", 5.0);
       cout << v.back()->aria();
       return 0;
}
```

5. **(1 pont)** Mennyi a bináris keresés algoritmusának komplexitása a legrosszabb esetben? Indokoljuk meg a választ.

MEGJEGYZÉS.
Minden tétel kötelező. Minden tételre teljes megoldást kell adni.
Minden tételre **1 pont** jár hivatalból. A legkisebb átmenő jegy: 5,00.
Munkaidő: 3 óra.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Informatikai Matematika szak
Javítókulcs

I TÉTEL. Algebra

Hivatalból 1p

1. a) **1. Módszer:** Az egyenlet a $\widehat{4}x = -\widehat{4} = \widehat{8}$ alakra hozható.
   Behelyettesítve a $\mathbb{Z}_{12}$ elemeit kapjuk, hogy az egyenlet megoldásai $x = \widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}$. 2p
   2. Módszer: Az egyenlet a $\widehat{4}(x+\widehat{1}) = \widehat{0}$ alakra is redukálható, ahonnan következik, hogy $x+\widehat{1}$ a 3 többszörösének egy osztálya $\mathbb{Z}_{12}$-ben, vagyis $x+\widehat{1} \in \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}\}$, amelyből kapjuk, hogy $x \in \{\widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}\}$. 2p
   b) Lagrange tétele alapján a $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ minden H részcsoportjára $|H| \mid 12$. Mivel $8 \nmid 12$, a $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ csoportnak nincsenek 8 elemű részcsoportjai. 1p

2. a) f valós vektorterek közötti lineáris transzformáció, mivel
   1. Módszer: f additív, vagyis minden $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ esetén kapjuk, hogy
   $f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = (x+x'+y+y', x+x'-(y+y'), y+y') =$
   $= (x+y, x-y, y) + (x'+y', x'-y', y') = f(x,y) + f(x',y')$. 1p
   f $\mathbb{R}$-homogén, vagyis minden $a \in \mathbb{R}$ és $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén teljesül, hogy
   $f(a(x,y)) = f(ax, ay) = (ax+ay, ax-ay, ay) = a(x+y, x-y, y) = af(x,y)$. 1p
   2. Módszer: Minden $a, b \in \mathbb{R}$ és $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ elemekre kapjuk, hogy
   $f(a(x,y)+b(x',y')) = f(ax+bx', ay+by') = (ax+bx'+ay+by', ax+bx'-(ay+by'), ay+by') =$
   $= a(x+y, x-y, y) + b(x'+y', x'-y', y') = af(x,y) + bf(x',y')$. 2p
   b) **1. Módszer:** Kiszámolva az $f(1,0) = (1,1,0), f(0,1) = (1,-1,1)$ vektorokat, ... 1p
   az f mátrixa a kanonikus bázispárra vonatkozóan nem más, mint $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1p
   2. Módszer: Írhatjuk, hogy $f(x,y)^t = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ... 1p
   ahonnan kapjuk, hogy az f kanonikus bázispárra vonatkozó mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1p
   c) Kapjuk, hogy $f(1,1) = (2,0,1)$ és $f(1,-1) = (0,2,-1)$. 1p
   Mivel a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix rangja 2, következik, hogy ezek a vektorok lineárisan függetlenek. .. 1p

MEGJEGYZÉS: Minden más megoldás megfelelően pontozódik.

Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Informatikai matematika szak
Javítókulcs

II. TÉTEL. Matematikai analízis

Hivatalból .... (1p)

1. A hányados kritérium alkalmazásához kiszámítjuk a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left((n+1)!\right)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{3^n(n!)^3}=$$

.... (1p)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

.... (1p)

Mivel $\frac{1}{9}<1$, ezért a sor konvergens. .... (1p)

2. Az $f:I\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-szer deriválható függvény n-edrendű Taylor-féle polinomja az $a\in I$ pontban a $T_{n,a}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

polinomfüggvény. .... (0,5p)

Jelen feladat esetén $I=\mathbb{R}$ és $a=6\pi$.

Kiszámítjuk az első- és másodrendű deriváltakat:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right),\quad f''(x)=-\frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

.... (0,5p)

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad\text{vagy}\quad f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & \text{ha}\quad n=4k\\ \frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & \text{ha}\quad n=4k+1\\ -\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & \text{ha}\quad n=4k+2\\ -\frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & \text{ha}\quad n=4k+3\end{cases},\quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

.... (1p)

Megfigyelhető, hogy

$$f^{(n)}(6\pi)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad n=2t\\ \frac{(-1)^t}{3^{2t+1}}, & \text{ha}\quad n=2t+1\end{cases}.$$

.... (0,5p)

Az f függvény n-edrendű Taylor-féle polinomja az $a=6\pi$ pontban n páratlan szám, vagyis $n=2t+1$ alakú szám esetén a következő:

$$\begin{aligned}T_{n,6\pi}f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(6\pi)}{k!}(x-6\pi)^k=\sum_{k=0}^{t}\frac{(-1)^k}{3^{2k+1}(2k+1)!}(x-6\pi)^{2k+1}=\\ &= 0+\frac{1}{3}(x-6\pi)+0-\frac{1}{3^3\cdot 3!}(x-6\pi)^3+\ldots+\frac{(-1)^t}{3^{2t+1}\cdot(2t+1)!}(x-6\pi)^{2t+1},\quad \forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

.... (0,5p)

3. *a*) Ha $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ az f függvény egy tetszőleges primitív függvénye, akkor $F'(x) = f(x)$, minden $x \in (0, +\infty)$ esetén. .... (0,5p)

Mivel $F'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} > 0$, minden $x \in (0, +\infty)$ esetén, ezért az F függvény növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon. .... (0,5p)

b)

$$\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+2} f(x) + \frac{x+2}{x+1} f(x+1) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1} \right) dx =$$

.... (1,0p)

A parciális integrálás képletét használva

$$= \ln(x+1)\, \ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx + \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

.... (1,0p)

MEGJEGYZÉS: Minden eltérő helyes megoldás arányosan pontozódik.

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli próba - 2023 július
Informatikai Matematika szak
Javítókulcs

III. TÉTEL. Geometria

Hivatalból 1p

1. a) A súlypont koordinátái $\left(\frac{1+5+8}{3}, \frac{2-1+3}{3}\right)$, vagyis $G\left(\frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
   Az egyenes egyenlete $AG: 2x + 11y - 24 = 0$ 1p

   b) Az AG egyenes iránytényezője $-\frac{2}{11}$, tehát a keresett l_B egyenes iánytényezője $\frac{11}{2}$. Az egyenes egyenlete $l_B: y + 1 = \frac{11}{2}(x - 5)$ 1p

   c) Kiszámoljuk az oldalak hosszainak a négyzetét
   $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ és $\quad AC^2 = 7^2 + 1^2 = 50.$ 1p
   Mivel $AB = BC$ és $AB^2 + BC^2 = AC^2$, következik, hogy az ABC egyenlő szárú, derékszögű. 1p

   d) Mivel az ABC háromszög derékszögű, a köré írt kör középpontja az $[AC]$ átfogó felezőpontja lesz, melynek koordinátái $\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$. 1p
   A kör sugara $R = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. A keresett kör egyenlete $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$. 1p

2. Legyen t a keresett érintő.

1. Módszer A t érintő iránytényezője $m_t = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{2}$, így az érintő egyenlete a következő alakba írható $d: y = \frac{1}{2}x + n$. 1p

A t egyenes érinti a parabolát akkor és csakis akkor, ha $|t \cap \mathcal{P}| = 1$. Ez azt jelenti, hogy a t egyenes és a parabola egyenleteiből alkotott egyenletredszernek egyetlen megoldása van. Kiküszöbölve az y-t, ez utóbbi feltétel azzal ekvivalens, hogy az $\left(\frac{1}{2}x + n\right)^2 = 16x$ másodfokú egyenletnek egyetlen megoldása van. 1p

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (n - 16)^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 8$, tehát ez érintő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + 8$. 1p

2. Módszer. A parabola egy $M(x_0, y_0)$ pontjába szerkesztett érintő egyenlete $yy_0 = 8(x + x_0)$, tehát az iránytényező $m_t = \frac{8}{y_0}$. 1p

Ugyanakkor az érintő iránytényezője $m_t = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{2}$. Tehát $y_0 = 16$. 1p

Mivel az M pont a parabolán van $y_0^2 = 16x_0 \Leftrightarrow x_0 = 16$, vagyis $M(16, 16)$. Így az érintő egyenlete: $16y = 8(x + 16) \Leftrightarrow x - 2y + 16 = 0$ 1p

Megjegyzés. Minden más helyes megoldás megfelelően lesz pontozva.

BABEŞ -BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Javítókulcs informatika tétel
1. vizsga: alapismeretek és szakismeretek kiértékelése, záróvizsga 2023 július
Informatikai matematika szak

Informatika tétel

1.	**2p**
a) Alaposztály definiálása (konstruktor, metódusok, hozzáférés az adatokhoz)	1p
b) Származtatott osztályok definiálása (öröklés, konstruktor, metódusok)	1p
2.	**2p**
Vektor létrehozása	1p
Vektor elemeinek szűrése	1p
3.	**2p**
Rendezést megvalósító kódrészlet (iterálás az elemeken, összehasonlítás, változók frissítése)	2p
4.	**2p**
A kiírandó érték helyes megadása	2p
5.	**1p**
A komplexitás megadása	0.5p
Indoklás	0.5p

Megjegyzés:
(1p) Hivatalból