Babeş-Bolyai University
Faculty of Matematics and Computer Science

GRADUATION EXAM
Written Test - July 2023
Mathematics Computer Science Study Programme

SUBJECT I. Algebra

1. **(3 points)**
   a) Solve in $\mathbb{Z}_{12}$ the equation $\widehat{4}x + \widehat{10} = \widehat{6}$.
   b) Are there any subgroups of $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ having 8 elements? Motivate your answer.
2. **(6 points)** Consider $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, x - y, y)$.
   a) Show that f is an $\mathbb{R}$-linear map.
   b) Write the matrix of the linear map f in the pair formed by the standard (canonical) bases.
   c) Are the vectors $f(1, 1), f(1, -1)$ linearly independent in ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$? Motivate your answer.

SUBJECT II. Calculus

1. **(3 points)** Study the nature of the following series with positive terms:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n (n!)^3}{(3n)!}.$$
2. **(3 points)** Write Taylor's polynomial of random rank $n \in \mathbb{N}$, when n is odd, attached to the function
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$
   about the point $a = 6\pi$.
3. **(3 points)** Consider the function $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.
   a) Prove that each antiderivative of the function f is increasing on $(0, +\infty)$.
   b) Compute the value of the definite integral
$$\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+2}\, f(x) + \frac{x+2}{x+1}\, f(x+1)\right) dx.$$

SUBJECT III. Geometry

1. **(6 points)** Consider the points $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ and $C(8, 3)$.
   a) Write the equation of the line AG, where G is the centroid (center of mass) of the triangle ABC.
   b) Write the equation of the line that passes through B and is perpendicular on AG.
   c) Prove that the points A, B and C can be the vertices of a square.
   d) Write down the equation of the circumscribed circle of the triangle ABC.
2. **(3 points)** Determine the equation of the line which is tangent to the parabola $y^2 = 16x$ and perpendicular to the line $4x + 2y - 7 = 0$.

SUBJECT IV. Computer Science

Note for the Computer Science subject:
One of the programming languages C++, Python, Java or C# can be used to solve problems 1 and 2.
Please indicate the programming language used.
Existing libraries (from C++, Python, Java, C#) can be used in the provided solutions.

1. **(2 points)** Write a program that:
   a) Implements a ***GeometricShape*** class with a parameterized constructor and the following attributes / methods:
   - ***string name*** – protected attribute, it represents the name of the geometric shape
   - ***double area()*** – abstract method that computes the area of the geometric shape (specifically implemented in the derived classes).

   b) Implements two classes derived from the ***GeometricShape*** class:
   - the class ***Square*** will have a constructor that gets the name and side of the square and an ***area***() method that computes the area of the square
   - the class ***Circle*** will have a constructor that gets the name and radius of the circle and an ***area***() method that computes the area of the circle.

2. **(2 points)** Create a vector of ***GeometricShape*** objects that contains three objects, at least one of which must be of type ***Square*** and one of type ***Circle***. Write a code sequence that displays all the geometric shapes from the vector that have the area greater than a given value.

3. **(2 points)** Fill in the missing lines of code from the following function that sorts a vector of ***GeometricShape*** objects in ascending order of their area.

```
void sorting(vector< GeometricShape*> v) {
   bool ok = 0;
   while (!ok) {
       …
    }
}
```

4. **(2 points)** Specify what will be displayed after executing the statements below, knowing that the *push_back*() function inserts an element at the end of the vector and the *back*() function returns a reference to the last element in the vector.

```
….
int main()
{
       vector< GeometricShape*> v;
       v.push_back(new Circle("circle1", 2.0));
       v.push_back(new Square("square1", 4.0));
       if (v.back()->area() > 14) v.push_back(new Square("square2", 5.0));
      cout << v.back()->area();
      return 0;
}
```

5. **(1 point)** What is the worst-case complexity for the binary search algorithm? Justify your answer.

NOTE.

All subjects are compulsory and full solutions are requested.
An initial score of **1 point** is awarded to each subject. The minimum passing grade is 5,00.
The working time is 3 hours.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu 1p

1. a) **Varianta 1:** Ecuaţia ia forma $\widehat{4}x = -\widehat{4} = \widehat{8}$.
   Înlocuind pe x cu elementele lui $\mathbb{Z}_{12}$ obţinem că soluţiile ecuaţiei sunt $x = \widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}$ 2p
   Varianta 2: Ecuaţia mai poate fi scrisă $\widehat{4}(x + \widehat{1}) = \widehat{0}$, de unde rezultă că $x + \widehat{1}$ este clasa din $\mathbb{Z}_{12}$ a unui multiplu de 3, adică $x + \widehat{1} \in \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}\}$ sau, echivalent, $x \in \{\widehat{2}, \widehat{5}, \widehat{8}, \widehat{11}\}$ 2p
   b) Conform teoremei lui Lagrange pentru un subgrup H al grupului $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, avem $|H| \mid 12$, deci, din cauză că $8 \nmid 12$, nu putem avea niciun subgrup cu 8 elemente în $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ 1p

2. a) f este transformare liniară de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale pentru că:
   Varianta 1: f este aditivă, deoarece pentru orice $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ avem
   $f((x, y) + (x', y')) = f(x + x', y + y') = (x + x' + y + y', x + x' - (y + y'), y + y') =$
   $= (x + y, x - y, y) + (x' + y', x' - y', y') = f(x, y) + f(x', y')$ 1p
   f este $\mathbb{R}$-omogenă, deoarece pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avem
   $f(a(x, y)) = f(ax, ay) = (ax + ay, ax - ay, ay) = a(x + y, x - y, y) = af(x, y)$ 1p
   Varianta 2: Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ avem
   $f(a(x, y) + b(x', y')) = f(ax + bx', ay + by') = (ax + bx' + ay + by', ax + bx' - (ay + by'), ay + by') =$
   $= a(x + y, x - y, y) + b(x' + y', x' - y', y') = af(x, y) + bf(x', y')$ 2p
   b) **Varianta 1:** Calculăm $f(1, 0) = (1, 1, 0), f(0, 1) = (1, -1, 1)$, ... 1p
   de unde matricea lui f relativ la bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p
   Varianta 2: Din $f(x, y)^t = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ... 1p
   avem că matricea lui f relativ la bazele canonice este $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p
   c) Avem $f(1, 1) = (2, 0, 1)$ şi $f(1, -1) = (0, 2, -1)$, ... 1p
   iar aceşti vectori sunt liniar independenţi, pentru că rangul matricei $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ este 2 .... 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică Informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1p)

1. Aplicăm criteriul raportului, calculând limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left((n+1)!\right)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{3^n(n!)^3}=$$

.... (1p)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

.... (1p)

Deoarce $\frac{1}{9}<1$, seria este convergentă. .... (1p)

2. Polinomul lui Taylor ataşat funcţiei $f:I\to\mathbb{R}$ în punctul $a\in I$ în care funcţia este de n ori derivabilă este funcţia polinomială $T_{n,a}f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$T_{n,a}f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

.... (0,5p)

Pentru problema actuală $I=\mathbb{R}$, iar $a=6\pi$.

Se calculează derivatele de ordinul 1 şi 2:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right),\quad f''(x)=-\frac{1}{3^2}\sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

.... (0,5p)

Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad\text{sau}\quad f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k\\ \frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k+1\\ -\frac{1}{3^n}\sin\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k+2\\ -\frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & \text{dacă}\quad n=4k+3\end{cases},\quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

.... (1p)

Se observă că

$$f^{(n)}(6\pi)=\begin{cases}0, & \text{dacă}\quad n=2t\\ \frac{(-1)^t}{3^{2t+1}}, & \text{dacă}\quad n=2t+1\end{cases}.$$

.... (0,5p)

Astfel polinomul lui Taylor ataşat funcţiei f în punctul $a=6\pi$, ştiind că n este impar, deci de forma $n=2t+1$, este următorul:

$$\begin{aligned}T_{n,6\pi}f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(6\pi)}{k!}(x-6\pi)^k=\sum_{k=0}^{t}\frac{(-1)^k}{3^{2k+1}(2k+1)!}(x-6\pi)^{2k+1}=\\ &= 0+\frac{1}{3}(x-6\pi)+0-\frac{1}{3^3\cdot 3!}(x-6\pi)^3+\ldots+\frac{(-1)^t}{3^{2t+1}\cdot(2t+1)!}(x-6\pi)^{2t+1},\quad\forall x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

.... (0,5p)

3. *a*) Dacă $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este o primitivă arbitrară a funcției f, atunci $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

.... (0,5p)

Deoarece $F'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, rezultă că F este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

.... (0,5p)

b)

$$\int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+2}\, f(x) + \frac{x+2}{x+1}\, f(x+1) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+2} + \frac{\ln(x+2)}{x+1} \right) dx =$$

.... (1,0p)

Aplicăm integrarea prin părți:

$$= \ln(x+1)\, \ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx + \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{x+1}\, dx = \ln 2 \cdot \ln 3.$$

.... (1,0p)

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă - iulie 2023
Specializarea Matematică informatică
Barem de corectare

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu 1p

1. a) Coordonatele centrului de greutate sunt $\left(\frac{1+5+8}{3}, \frac{2-1+3}{3}\right)$. Avem aşadar $G\left(\frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
   Ecuaţia dreptei $AG : 2x + 11y - 24 = 0$ 1p

   b) Panta dreptei AG este $-\frac{2}{11}$, deci panta dreptei l_B pe care o căutăm este $\frac{11}{2}$. Ecuaţia dreptei căutate este $l_B : y + 1 = \frac{11}{2}(x - 5)$ 1p

   c) Calculăm pătratele lungimilor laturilor
   $AB^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ şi $\quad AC^2 = 7^2 + 1^2 = 50.$ 1p
   Cum $AB = BC$ şi $AB^2 + BC^2 = AC^2$, deducem că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AC, de unde rezultă concluzia 1p

   d) Triunghiul ABC fiind dreptunghic, centrul cercului este mijlocul ipotenuzei $[AC]$, adică punctul de coordonate $\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$. 1p
   Raza cercului este $R = \frac{AC}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Ecuaţia cercului cerut este $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$. 1p

2. Fie t tangenta cerută.

   Varianta 1. Panta acestei drepte este $m_t = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{2}$, astfel ecuaţia tangentei se poate scrie în forma $d : y = \frac{1}{2}x + n$. 1p

   Dreapta t este tangentă la parabola dacă şi numai dacă $|t \cap \mathcal{P}| = 1$. Aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă sistemul alcătuit din ecuaţia dreptei şi ecuaţia parabolei are soluţie unică. Eliminând pe y, ultima condiţie este echivalentă cu faptul că ecuaţia de gradul doi $\left(\frac{1}{2}x + n\right)^2 = 16x$ are o singură soluţie. 1p

   $\Delta = 0 \Leftrightarrow (n - 16)^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 8$, deci ecuaţia tangentei este: $y = \frac{1}{2}x + 8$. 1p

   Varianta 2. Ecuaţia tangentei într-un punct $M(x_0, y_0)$ al parabolei este $yy_0 = 8(x + x_0)$, deci panta tangentei este $m_t = \frac{8}{y_0}$. 1p

   Pe de altă parte, panta tangentei $m_t = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{2}$. Deci $y_0 = 16$. 1p

   Punctul M fiind pe parabolă, avem: $y_0^2 = 16x_0 \Leftrightarrow x_0 = 16$, adică $M(16, 16)$. Astfel ecuaţia tangentei este: $16y = 8(x + 16) \Leftrightarrow x - 2y + 16 = 0$ 1p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Barem Subiect Informatică
Proba 1: Evaluarea cunoștințelor fundamentale și de specialitate, examen licență iulie 2023
Specializarea Matematică Informatică

Subiect Informatică

1.	**2p**
a) Definitie clasa de baza (constructor, metode, acces la date)........................	1p
b) Definitie clase derivate (mostenire, constructor, metode)...........................	1p
2.	**2p**
Creare vector..	1p
Filtrare vector...	1p
3.	**2p**
Secventa sortare (iterare elemente, comparatii, actualizare variabile)	2p
4.	**2p**
Indicarea corecta a valorii ce se afiseaza..	2p
5.	**1p**
Indicarea complexitatii..	0.5p
Justificarea raspunsului...	0.5p

Notă:
(1p) Oficiu