

Concurs MATE-INFO UBB 2025  
Proba scrisă la MATEMATICĂ

1. Dacă funcția  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este definită prin expresia

$$f(x) = \log_x \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{x}, \forall x > 1,$$

atunci valoarea expresiei  $f(8)$  este

- A  $-6$ ;                       B  $-\frac{8}{3}$ ;                       C  $-\frac{10}{3}$ ;                       D  $\frac{8}{3}$ .

2. Dacă  $S$  este mulțimea soluțiilor reale ale ecuației  $|x+1| + |x-1| = 4$ , atunci suma elementelor mulțimii  $S$  este

- A  $2$ ;                       B  $4$ ;                       C  $-4$ ;                       D  $0$ .

3. Punctul  $A(2, 3)$  este vârful unui triunghi  $ABC$  al cărui ortocentru este punctul  $H(1, -1)$ . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Panta dreptei  $AH$  este  $\frac{1}{4}$ .                       B Panta dreptei  $AH$  este  $4$ .  
 C Panta dreptei  $BC$  este  $-4$ .                       D Panta dreptei  $BC$  este  $-\frac{1}{4}$ .

4. Valoarea lui  $\cos \frac{2025\pi}{6}$  este

- A  $-1$ ;                       B  $-\frac{1}{2}$ ;                       C  $0$ ;                       D  $\frac{1}{2}$ .

5. Fie  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  versorii axelor de coordonate într-un sistem cartezian. Dacă vectorii  $\vec{a} = 2\vec{i} - x\vec{j}$  și  $\vec{b} = x\vec{i} - 8\vec{j}$  sunt coliniari, atunci valoarea parametrului  $x \in \mathbb{R}$  poate fi:

- A  $-4$ ;                       B  $0$ ;                       C  $4$ ;                       D  $8$ .

6. Termenii unei progresii geometrice sunt numerele naturale  $a < b < c$  care satisfac relația  $a + b + c = 21$ . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate, dacă și rația progresiei este un număr natural?

- A Există cel puțin o progresie geometrică cu această proprietate.  
 B Există exact două progresii geometrice cu această proprietate.  
 C Rația progresiei este număr par.  
 D Rația progresiei este număr impar.

7. Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  se notează  $a_n = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^n x}{\cos^2 x}$ . Valoarea limitei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$  este:

- A  $\frac{1}{2}$ ;                       B  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;                       C  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ;                       D  $2\sqrt{2}$ .

8. Valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$  este:

A 1;

B  $e^{1/3}$ ;

C  $e^{2/3}$ ;

D  $e^{1/6}$ .

9. Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x < 0 \\ ax + b, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Dacă  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , atunci valoarea sumei  $a + b$  este:

A 0;

B  $\frac{\pi}{4}$ ;

C  $\frac{\pi}{2}$ ;

D  $-2$ .

10. Se dă pătratul  $MNPQ$  cu latura  $MN = 2$ . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ .

B  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$ .

C  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 4$ .

D  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 4\sqrt{2}$ .

11. Fie  $ABCD$  un patrulater oarecare și punctele  $G_1$  respectiv  $G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABD$  respectiv  $BCD$ . Notăm cu  $M$  mijlocul diagonalei  $BD$ . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$ .

B  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ .

C  $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

D  $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

12. Fie  $M = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid z + \frac{2025}{z} \in \mathbb{R} \right\}$ . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A  $\mathbb{R}^* \subseteq M$ .

B Dacă  $z \in M$ , atunci  $\frac{2025}{z} \in M$ .

C Dacă  $z \in M \setminus \mathbb{R}^*$ , atunci  $|z|$  este unic determinat.

D Mulțimea  $M \setminus \mathbb{R}^*$  este vidă.

13. Numărul numerelor întregi strict pozitive  $m$  pentru care ecuația de gradul doi

$$mx^2 + 20x + m = 0$$

admite două soluții reale distincte este

A 0;

B 9;

C 10;

D 11.

14. Fie  $S$  mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 2^{x+1} + 2^{x+3}.$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A  $S$  are exact un element.

B Există cel puțin un număr irațional în mulțimea  $S$ .

C  $S$  are exact două elemente.

D Există cel puțin un număr rațional în mulțimea  $S$ .

15. Valoarea integralei  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$  este:

A  $\ln(2 - \sqrt{3})$ ;

B  $\ln(2 + \sqrt{3})$ ;

C  $\ln(3 - \sqrt{3})$ ;

D  $\ln(4 + \sqrt{3})$ .

16. Numărul soluțiilor ecuației  $\sin^2(2x) + \cos^2(x) = 1$  în intervalul  $[0, \pi]$  este:

A 4;

B 3;

C 2;

D 1.

17. Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Fiind dat un număr real  $t \in (0, 1)$ , dreapta de ecuație  $y = t$  intersectează graficul lui  $f$  în punctele  $A$  și  $B$ . Fie  $A'$  și  $B'$  proiecțiile pe axa  $Ox$  ale punctelor  $A$  și respectiv  $B$ . Atunci când  $t$  variază în  $(0, 1)$ , valoarea maximă a ariei dreptunghiului  $AA'B'B$  este:

A  $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ ;

B  $\frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$ ;

C  $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ ;

D  $\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$ .

18. Dreptele de ecuații  $11x + 3y - 7 = 0$  și  $12x + y - 19 = 0$  se intersectează într-un punct  $M$ . Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  trec prin punctul  $M$  și sunt situate la distanța  $\sqrt{2}$  față de punctul  $A(3, -2)$ . Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Suma coordonatelor punctului  $M$  este  $-7$ .

B Suma coordonatelor punctului  $M$  este  $-3$ .

C Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  au ecuațiile:  $7x + y - 9 = 0$  și  $x - y - 7 = 0$ .

D Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  au ecuațiile:  $x + 7y - 9 = 0$  și  $x + y + 7 = 0$ .

19. Se dă un romb  $ABCD$  cu vârful  $A(1, 0)$  și cu latura  $AB$  pe axa  $Ox$ . Dacă intersecția diagonalelor se află în punctul  $M(3, 4)$ , atunci aria rombului este

A 20;

B 40;

C 60;

D 80.

Problemele 20, 21 și 22 se referă la funcția  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$ .

20. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Graficul lui  $f$  posedă o axă de simetrie paralelă cu axa  $Oy$ .

B Graficul lui  $f$  admite un centru de simetrie.

C Graficul lui  $f$  nu admite nici centru de simetrie, nici axă de simetrie paralelă cu axa  $Oy$ .

D Graficul lui  $f$  admite un centru de simetrie, dar nu posedă o axă de simetrie paralelă cu axa  $Oy$ .

21. Numărul punctelor de extrem local ale lui  $f$  este:

A 0;

B 2;

C 3;

D 4.

22. Valoarea integralei  $\int_0^4 |f(x)| dx$  este:

A  $\frac{8}{3}$ ;

B  $\frac{4}{3}$ ;

C  $\frac{16}{3}$ ;

D 4.

23. Fie  $a \in \mathbb{C}$  și considerăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x - y + az = 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

A Pentru orice  $a \in \mathbb{R}$  sistemul admite soluție unică.

B Dacă sistemul este incompatibil, atunci  $|a| = \sqrt{5}$ .

C Există  $a \in \mathbb{C}$  pentru care sistemul admite o infinitate de soluții.

D Dacă pentru o soluție  $(x, y, z)$  avem  $x + y + z = 0$ , atunci  $a \notin \mathbb{R}$ .

24. Fie  $f: (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$  un morfism de grupuri. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Dacă  $\text{Im}(f)$  are un singur element, atunci acesta este  $\widehat{1}$ .
- B  $\widehat{0} \in \text{Im}(f)$ .
- C Dacă  $\text{Im}(f)$  are cel puțin două elemente, atunci  $f$  este surjectiv.
- D Există un singur morfism  $f: (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$ .

## Răspunsuri corecte

Concursul Mate-Info UBB, 2025

Proba scrisă la MATEMATICĂ

1.  C
2.  D
3.  B,  D
4.  C
5.  A,  C
6.  A,  B,  C
7.  C
8.  B
9.  A
10.  A,  B,  C
11.  B,  C
12.  A,  B,  C
13.  B
14.  A,  D
15.  B
16.  A
17.  B
18.  B,  C
19.  D
20.  B,  D
21.  D
22.  C
23.  A,  B,  D
24.  B,  C