

MATE-INFO UBB verseny – 2025
MATEMATIKA írásbeli próba

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az erre a célra kapott lapon kell bejelöljön. A feleletválasztós feladatsor értékelése a versenyszabályzat részleges pontozási rendszer alapján történik.

1. Ha az $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \log_x \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{x}, \quad \forall x > 1,$$

képlettel értelmezzük, akkor az $f(8)$ kifejezés értéke

- A -6 ; B $-\frac{8}{3}$; C $-\frac{10}{3}$; D $\frac{8}{3}$.

2. Ha S az $|x + 1| + |x - 1| = 4$ egyenlet valós megoldásainak halmaza, akkor az S halmaz elemeinek összege

- A 2 ; B 4 ; C -4 ; D 0 .

3. Az ABC háromszög egyik csúcsa $A(2, 3)$ és az ortocentruma pedig $H(1, -1)$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az AH egyenes irányítányezője $\frac{1}{4}$.
 B Az AH egyenes irányítányezője 4 .
 C A BC egyenes irányítányezője -4 .
 D A BC egyenes irányítányezője $-\frac{1}{4}$.

4. A $\cos \frac{2025\pi}{6}$ kifejezés értéke

- A -1 ; B $-\frac{1}{2}$; C 0 ; D $\frac{1}{2}$.

5. Adottak egy Descartes-féle koordináta-rendszer \vec{i} és \vec{j} egységvektorai. Ha az $\vec{a} = 2\vec{i} - x\vec{j}$ és $\vec{b} = x\vec{i} - 8\vec{j}$ vektorok kollineárisak, akkor az $x \in \mathbb{R}$ paraméter lehetséges értéke:

- A -4 ; B 0 ; C 4 ; D 8 .

6. Egy mértani haladvány $a < b < c$ tagjai természetes számok, amelyekre teljesül, hogy $a + b + c = 21$. Az alábbi állítások közül melyek igazak, ha a haladvány állandó hányadosa is természetes szám?

- A Létezik legalább egy mértani haladvány a megadott tulajdonságokkal.
 B Pontosan két mértani haladvány létezik a megadott tulajdonságokkal.
 C A haladvány állandó hányadosa páros szám.
 D A haladvány állandó hányadosa páratlan szám.

7. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $a_n = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^n x}{\cos^2 x}$. A $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ határérték

- A $\frac{1}{2}$; B $\frac{1}{\sqrt{2}}$; C $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; D $2\sqrt{2}$.

8. A $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$ határérték

- A 1; B $e^{1/3}$; C $e^{2/3}$; D $e^{1/6}$.

9. Adottak az $a, b \in \mathbb{R}$ számok és az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet az

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \operatorname{arctg} x, & \text{ha } x < 0 \\ ax + b, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

képlettel értelmezzük. Ha az f függvény deriválható az \mathbb{R} halmazon, akkor az $a + b$ összeg értéke

- A 0; B $\frac{\pi}{4}$; C $\frac{\pi}{2}$; D -2 .

10. Ha az $MNPQ$ négyzet oldalhossza $MN = 2$, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$. B $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$. C $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 4$. D $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 4\sqrt{2}$.

11. Egy tetszőleges $ABCD$ négyszögben G_1 és G_2 az ABD , illetve BCD háromszögek súlypontjai. Ha a BD átló felezőpontja az M pont, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM}$. B $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$. C $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. D $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

12. Adott az $M = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid z + \frac{2025}{z} \in \mathbb{R} \right\}$ halmaz. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $\mathbb{R}^* \subseteq M$.
 B Ha $z \in M$, akkor $\frac{2025}{z} \in M$.
 C Ha $z \in M \setminus \mathbb{R}^*$, akkor $|z|$ egyértelműen meghatározott.
 D Az $M \setminus \mathbb{R}^*$ halmaz üres.

13. Azon m szigorúan pozitív egész paraméterek száma, amelyekre az

$$mx^2 + 20x + m = 0$$

másodfokú egyenletnek két különböző valós megoldása van

- A 0; B 9; C 10; D 11.

14. Legyen S a

$$3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 2^{x+1} + 2^{x+3}$$

egyenlet valós megoldásainak halmaza. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az S halmaz egyetlen egy elemet tartalmaz.
 B Az S halmaz legalább egy irracionális számot tartalmaz.
 C Az S halmaz pontosan két elemet tartalmaz.
 D Az S halmaz legalább egy racionális számot tartalmaz.

15. Az $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ integrál értéke

- A $\ln(2 - \sqrt{3})$; B $\ln(2 + \sqrt{3})$; C $\ln(3 - \sqrt{3})$; D $\ln(4 + \sqrt{3})$.

16. A $\sin^2(2x) + \cos^2(x) = 1$ egyenlet $[0, \pi]$ intervallumban található megoldásainak száma

- A 4; B 3; C 2; D 1.

17. Az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

képlettel értelmezzük. Adott $t \in (0, 1)$ valós szám esetén az $y = t$ egyenletű egyenes az f grafikus képét az A és B pontokban metszi. Legyenek A' és B' az A , illetve B pontok Ox -tengelyre eső vetületei. Amikor t a $(0, 1)$ intervallumon változik, akkor az $AA'B'B$ téglalap területének maximális értéke

- A $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; B $\frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$; C $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$; D $\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$.

18. Az M pont a $11x + 3y - 7 = 0$ és $12x + y - 19 = 0$ egyenletű egyenesek metszéspontja. A d_1 és d_2 egyenesek az $A(3, -2)$ ponttól $\sqrt{2}$ távolságra találhatóak és átmennek az M ponton. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az M pont koordinátáinak összege -7 .
 B Az M pont koordinátáinak összege -3 .
 C A d_1 és d_2 egyenesek egyenletei: $7x + y - 9 = 0$ és $x - y - 7 = 0$.
 D A d_1 és d_2 egyenesek egyenletei: $x + 7y - 9 = 0$ és $x + y + 7 = 0$.

19. Az $A(1, 0)$ csúcsú $ABCD$ rombusz AB oldala az Ox -tengelyen található. Ha a rombusz átlói az $M(3, 4)$ pontban metszik egymást, akkor a rombusz területe

- A 20; B 40; C 60; D 80.

A 20., 21. és 22. feladatok az $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$ függvényre vonatkoznak.

20. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az f függvény grafikus képének van Oy -tengellyel párhuzamos szimmetriatengelye.
 B Az f függvény grafikus képének van szimmetria-középpontja.
 C Az f függvény grafikus képének nincs szimmetria-középpontja és nincs Oy -tengellyel párhuzamos szimmetriatengelye.
 D Az f függvény grafikus képének van szimmetria-középpontja, de nincs Oy -tengellyel párhuzamos szimmetriatengelye.

21. Az f függvény helyi szélsőértékpontjainak száma

- A 0; B 2; C 3; D 4.

22. Az $\int_0^4 |f(x)| dx$ integrál értéke

- A $\frac{8}{3}$; B $\frac{4}{3}$; C $\frac{16}{3}$; D 4.

23. Adott az

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x - y + az = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszer, ahol $a \in \mathbb{C}$ paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van.
- B Ha az egyenletrendszer inkompatibilis, akkor $|a| = \sqrt{5}$.
- C Létezik olyan $a \in \mathbb{C}$ paraméter, amelyre az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
- D Ha egy (x, y, z) megoldás esetén $x + y + z = 0$, akkor $a \notin \mathbb{R}$.

24. Adott egy $f: (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$ csoportmorfizmus. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Ha $\text{Im}(f)$ egyetlen elemből áll, akkor ez az elem $\hat{1}$.
- B $\hat{0} \in \text{Im}(f)$.
- C Ha $\text{Im}(f)$ legalább két elemet tartalmaz, akkor f szürjektív.
- D Egyetlen $f: (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$ csoportmorfizmus létezik.

Helyes válaszok

BBTE Matek-Infó Verseny, 2025

MATEMATIKA írásbeli próba

1. C
2. D
3. B, D
4. C
5. A, C
6. A, B, C
7. C
8. B
9. A
10. A, B, C
11. B, C
12. A, B, C
13. B
14. A, D
15. B
16. A
17. B
18. B, C
19. D
20. B, D
21. D
22. C
23. A, B, D
24. B, C