

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2025
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1. Sei $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) = \log_x \frac{1}{2} + \log_2 \frac{1}{x}, \forall x > 1.$$

Dann ist $f(8)$ gleich

- A -6 ; B $-\frac{8}{3}$; C $-\frac{10}{3}$; D $\frac{8}{3}$.

2. Sei S die Menge der reellen Lösungen der Gleichung $|x + 1| + |x - 1| = 4$. Dann ist die Summe der Elemente der Menge S gleich

- A 2 ; B 4 ; C -4 ; D 0 .

3. Der Punkt $A(2, 3)$ ist Eckpunkt eines Dreiecks ABC , dessen Orthozentrum der Punkt $H(1, -1)$ ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Steigung der Geraden AH ist $\frac{1}{4}$. B Die Steigung der Geraden AH ist 4 .
 C Die Steigung der Geraden BC ist -4 . D Die Steigung der Geraden BC ist $-\frac{1}{4}$.

4. Der Wert von $\cos \frac{2025\pi}{6}$ ist

- A -1 ; B $-\frac{1}{2}$; C 0 ; D $\frac{1}{2}$.

5. Es seien \vec{i} und \vec{j} die Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems. Sind die Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} - x\vec{j}$ und $\vec{b} = x\vec{i} - 8\vec{j}$ kollinear, dann kann der Wert des Parameters $x \in \mathbb{R}$

- A -4 ; B 0 ; C 4 ; D 8

sein.

6. Die natürliche Zahlen $a < b < c$ sind aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge und genügen der Bedingung $a + b + c = 21$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, wenn auch der Quotient der geometrischen Folge eine natürliche Zahl ist?

- A Es gibt mindestens eine geometrische Folge mit diesen Eigenschaften.
 B Es gibt genau zwei geometrische Folgen mit diesen Eigenschaften.
 C Der Quotient der geometrischen Folge ist eine gerade Zahl.
 D Der Quotient der geometrischen Folge ist eine ungerade Zahl.

7. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $a_n = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^n x}{\cos^2 x}$. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ beträgt

- A $\frac{1}{2}$; B $\frac{1}{\sqrt{2}}$; C $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; D $2\sqrt{2}$.

8. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$ beträgt

A 1;

B $e^{1/3}$;

C $e^{2/3}$;

D $e^{1/6}$.

9. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \operatorname{arctg} x, & \text{falls } x < 0 \\ ax + b, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Ist f auf \mathbb{R} differenzierbar, dann ist die Summe $a + b$ gleich

A 0;

B $\frac{\pi}{4}$;

C $\frac{\pi}{2}$;

D -2 .

10. Gegeben sei das Quadrat $MNPQ$ mit der Seite $MN = 2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$.

B $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$.

C $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 4$.

D $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 4\sqrt{2}$.

11. Es seien $ABCD$ ein beliebiges Viereck sowie G_1 und G_2 die Schwerpunkte der Dreiecke ABD beziehungsweise BCD . Es sei M der Mittelpunkt der Diagonalen BD . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

B $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

C $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

12. Es sei $M = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid z + \frac{2025}{z} \in \mathbb{R} \right\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\mathbb{R}^* \subseteq M$.

B Ist $z \in M$, dann ist $\frac{2025}{z} \in M$.

C Ist $z \in M \setminus \mathbb{R}^*$, dann ist $|z|$ eindeutig bestimmt.

D Die Menge $M \setminus \mathbb{R}^*$ ist leer.

13. Die Anzahl der streng positiven ganzen Zahlen m , für welche die Gleichung zweiten Grades

$$mx^2 + 20x + m = 0$$

zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt, ist

A 0;

B 9;

C 10;

D 11.

14. Es sei S die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 2^{x+1} + 2^{x+3}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A S hat genau ein Element.

B Es gibt wenigstens eine irrationale Zahl in der Menge S .

C S hat genau zwei Elemente.

D Es gibt wenigstens eine rationale Zahl in der Menge S .

15. Der Wert des Integrals $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ ist

A $\ln(2 - \sqrt{3})$;

B $\ln(2 + \sqrt{3})$;

C $\ln(3 - \sqrt{3})$;

D $\ln(4 + \sqrt{3})$.

16. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\sin^2(2x) + \cos^2(x) = 1$ im Intervall $[0, \pi]$ ist

A 4;

B 3;

C 2;

D 1.

17. Es sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x^2}, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Gegeben sei die reelle Zahl $t \in (0, 1)$. Die Gerade mit der Gleichung $y = t$ schneidet den Graphen der Funktion f in den Punkten A und B . Es seien A' und B' die orthogonalen Projektionen auf die Ox -Achse der Punkte A beziehungsweise B . Wenn t das Intervall $(0, 1)$ durchläuft, dann ist der größte Wert des Flächeninhaltes des Rechtecks $AA'B'B$ gleich

A $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$;

B $\frac{3\sqrt[3]{2}}{8}$;

C $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$;

D $\frac{\sqrt[3]{2}}{8}$.

18. Die Geraden mit den Gleichungen $11x + 3y - 7 = 0$ und $12x + y - 19 = 0$ schneiden einander in einem Punkt M . Die Geraden d_1 und d_2 enthalten den Punkt M und sind $\sqrt{2}$ vom Punkt $A(3, -2)$ entfernt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Summe der Koordinaten des Punktes M beträgt -7 .

B Die Summe der Koordinaten des Punktes M beträgt -3 .

C Die Geraden d_1 und d_2 haben die Gleichungen: $7x + y - 9 = 0$ und $x - y - 7 = 0$.

D Die Geraden d_1 und d_2 haben die Gleichungen: $x + 7y - 9 = 0$ und $x + y + 7 = 0$.

19. Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit dem Eckpunkt $A(1, 0)$ und der Seite AB auf der Ox -Achse gelegen. Befindet sich der Schnittpunkt der Diagonalen im Punkt $M(3, 4)$, dann beträgt der Flächeninhalt des Rhombus

A 20;

B 40;

C 60;

D 80.

Die Aufgaben 20, 21 und 22 beziehen sich auf die Funktion $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$.

20. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Der Graph von f hat eine zur Oy -Achse parallele Symmetrieachse.

B Der Graph von f hat ein Symmetriezentrum.

C Der Graph von f hat weder ein Symmetriezentrum, noch eine zur Oy -Achse parallele Symmetrieachse.

D Der Graph von f hat ein Symmetriezentrum, jedoch keine zur Oy -Achse parallele Symmetrieachse.

21. Die Anzahl der lokalen Extremstellen der Funktion f beträgt

A 0;

B 2;

C 3;

D 4.

22. Der Wert des Integrals $\int_0^4 |f(x)| dx$ beträgt

A $\frac{8}{3}$;

B $\frac{4}{3}$;

C $\frac{16}{3}$;

D 4.

23. Gegeben seien $a \in \mathbb{C}$ und das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2x - y + az = 1. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Das System hat für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine einzige Lösung.
- B Ist das System unlösbar, dann ist $|a| = \sqrt{5}$.
- C Es gibt $a \in \mathbb{C}$, für die das System unendlich viele Lösungen hat.
- D Wenn für eine Lösung (x, y, z) die Bedingung $x + y + z = 0$ gilt, dann ist $a \notin \mathbb{R}$.

24. Es sei $f: (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$ ein Gruppenmorphismus. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- A Hat $\text{Im}(f)$ ein einziges Element, dann ist dieses $\hat{1}$.
- B $\hat{0} \in \text{Im}(f)$.
- C Hat $\text{Im}(f)$ wenigstens zwei Elemente, dann ist f surjektiv.
- D Es gibt einen einzigen Morphismus $f: (\mathbb{Z}_{10}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_5, +)$.

Richtige Antworten

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2025

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1. C
2. D
3. B, D
4. C
5. A, C
6. A, B, C
7. C
8. B
9. A
10. A, B, C
11. B, C
12. A, B, C
13. B
14. A, D
15. B
16. A
17. B
18. B, C
19. D
20. B, D
21. D
22. C
23. A, B, D
24. B, C