BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

ZULASSUNG 2024

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIGER HINWEIS: Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

1. Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1},$$

dann ist der Wert $f(\log_2 3)$ gleich

A -1; B 2; C 3; D 5.

2. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1}\right)$ ist

A 0; B $\frac{1}{2}$; C 2; D 1.

3. Im Parallelogramm $ABCD$ gelten $AB = 1$, $AD = 2$ und $\widehat{B} = 60°$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $CD = 2$. B $BC = 2$. C $AC = \sqrt{3}$. D $BD = \sqrt{3}$.

4. Es sei A eine Menge mit n Elementen. Wenn es 10 Teilmengen mit $(n-2)$ Elementen der Menge A gibt, dann

A ist $n \in (2, 6]$;
B ist $n \in (6, 10]$;
C ist $n \in (10, 14]$;
D gibt es keine solchen Werte von n.

5. Es sei S die Menge der reellen Lösungen der Gleichung

$$4^x - 2^x \cdot 5^{x+1} = 6 \cdot 25^x.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A S hat genau zwei Elemente.
B S hat genau ein Element.
C $\dfrac{1+\log_2 3}{1+\log_2 5} \in S$.
D $\dfrac{1+\log_2 3}{1-\log_2 5} \in S$.

6. Im Dreieck ABC gelten $E \in (AB)$, $EB = 2 \cdot EA$, $F \in (AC)$ und $FA = 3 \cdot FC$. Haben die Punkte A, E und F jeweils die Koordinaten $A(1,3)$, $E(3,6)$ und $F(4,18)$, dann sind die Koordinaten des Schwerpunktes G des Dreiecks ABC

$\boxed{\text{A}}$ $G\left(\frac{13}{3}, \frac{38}{3}\right)$; $\boxed{\text{B}}$ $G\left(\frac{23}{9}, 10\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $G\left(\frac{47}{9}, \frac{70}{3}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $G\,(7, 26)$.

7. Im Dreieck ABC sind die Punkte $D(1,5)$, $E(-4,4)$ und $F(6,2)$ jeweils die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und AC. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt

$\boxed{\text{A}}$ 10; $\boxed{\text{B}}$ 20; $\boxed{\text{C}}$ 40; $\boxed{\text{D}}$ 80.

8. Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ ist

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\pi}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{\pi}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ π.

9. Gegeben seien die reelle Zahl a, die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 1 + x + axe^{-x^2}$, sowie die Punkte $A(0,1)$ und $B(-1,3)$. Der Wert von a, für den die Gerade AB die Tangente an den Graphen von f im Punkt A ist, beträgt

$\boxed{\text{A}}$ -5; $\boxed{\text{B}}$ -3; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ 3.

10. Im Parallelogramm $ABCD$ sind $A(-2,1)$, $B(2,3)$ und $C(5,3)$. Die Gleichung der Geraden BD ist

$\boxed{\text{A}}$ $2x - y - 1 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x - 2y + 4 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $2x + y - 1 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x + 2y + 4 = 0$.

11. Es sei $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ mit $\cos(\alpha) = -\frac{1}{4}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. $\boxed{\text{B}}$ $\sin(2\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$. $\boxed{\text{C}}$ $\cos(2\alpha) = -\frac{7}{8}$. $\boxed{\text{D}}$ $\operatorname{tg}(\alpha) = -\sqrt{15}$.

12. Es seien $\overrightarrow{i}$ und $\overrightarrow{j}$ die Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems. Sind die Vektoren $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + (p-1)\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{v} = 8\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ parallel, dann kann der Wert des Parameters $p \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{7}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{19}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ 6

sein.

13. Die ganzen Zahlen b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 sind aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge mit dem Quotienten $q = 3$. Es sei $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ S ist durch 11 teilbar.
$\boxed{\text{B}}$ S ist genau dann eine Quadratzahl, wenn b_1 eine Quadratzahl ist.
$\boxed{\text{C}}$ Ist b_1 eine ungerade Zahl, dann ist S eine gerade Zahl.
$\boxed{\text{D}}$ Ist b_1 eine ungerade Zahl, dann ist S eine ungerade Zahl.

14. Gegeben seien ein reeller Parameter a sowie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y - z &= a \\ x + 2y - z &= 0 \\ x + ay + z &= 1. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Determinante der Matrix des Systems von Null verschieden.
$\boxed{\text{B}}$ Es gibt $a \in \mathbb{R}$, für welche das System wenigstens zwei Lösungen hat.
$\boxed{\text{C}}$ Für $a = 1$ ist $x + y + z = 1$.
$\boxed{\text{D}}$ Es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass $x + y + z = 0$.

15. In der Permutationsgruppe S_4 betrachte man die Elemente

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist $x \in S_4$ eine Permutation mit $\sigma x = \tau$, dann ist

$\boxed{\text{A}}$ x nicht eindeutig bestimmt;
$\boxed{\text{B}}$ x eindeutig bestimmt;
$\boxed{\text{C}}$ $x^2 = \sigma$;
$\boxed{\text{D}}$ x^2 die identische Permutation.

16. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & \text{falls } x < 0 \\ e^{bx} + 2\sin x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

definierte Funktion. Ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann beträgt die Summe $a + b$

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ -2; $\boxed{\text{D}}$ -1.

17. Gegeben seien die reelle Zahl a und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$ definierte Funktion. Die Menge, bestehend aus den Werten von a, für welche f eine lokale Extremstelle hat, deren Entfernung zur Oy-Achse 1 beträgt, ist

$\boxed{\text{A}}$ $\{-3, 3\}$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-3\}$; $\boxed{\text{C}}$ $\{3\}$; $\boxed{\text{D}}$ leer.

18. Sei $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{x} t \sin t \, dt$ definierte Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $x = 0$ ist eine lokale Extremstelle von f.
$\boxed{\text{B}}$ f ist auf $[-\pi, \pi]$ streng wachsend.
$\boxed{\text{C}}$ f ist auf $[-\pi, \pi]$ streng fallend.
$\boxed{\text{D}}$ $x = 0$ ist ein Wendepunkt von f.

19. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{B}}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}$.

20. Im Quadrat $ABCD$ gelten $A(1,0)$ und $B(5,2)$. Die Gleichung der Geraden CD kann

$\boxed{\text{A}}$ $x - 2y - 11 = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $x - 2y - 1 = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $x - 2y + 9 = 0$; $\boxed{\text{D}}$ $x + 2y - 1 = 0$

sein.

21. Für eine Matrix $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ bezeichnet man mit $\mathrm{Tr}(X)$ die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix X. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dann beträgt der Ausdruck $\det(A^2) - \mathrm{Tr}(A^2)$ den Wert

$\boxed{\text{A}}$ 21; $\boxed{\text{B}}$ 22; $\boxed{\text{C}}$ 23; $\boxed{\text{D}}$ 24.

22. Sind x_1, x_2 und x_3 die Wurzeln des Polynoms

$$f = X^3 + X^2 + 6X + 2,$$

dann ist der Wert des Ausdrucks $\frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$ gleich

$\boxed{\text{A}}$ 1; $\boxed{\text{B}}$ 0; $\boxed{\text{C}}$ i; $\boxed{\text{D}}$ $-i$.

23. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \mathrm{e}^x}$ definierte Funktion. Der Flächeninhalt der Menge, die sich zwischen dem Graphen von f, der Ox-Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ befindet, beträgt

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ 2.

24. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}}$ ist gleich

$\boxed{\text{A}}$ e; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{4}{\mathrm{e}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{\mathrm{e}}$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2}{\mathrm{e}}$.

BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Richtige Antworten

ZULASSUNG 2024

Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1. $\boxed{\textbf{C}}$
2. $\boxed{\textbf{D}}$
3. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
4. $\boxed{\textbf{A}}$
5. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
6. $\boxed{\textbf{A}}$
7. $\boxed{\textbf{C}}$
8. $\boxed{\textbf{A}}$
9. $\boxed{\textbf{B}}$
10. $\boxed{\textbf{A}}$
11. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{A}}$
13. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
14. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
15. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
16. $\boxed{\textbf{D}}$
17. $\boxed{\textbf{A}}$
18. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
19. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
20. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
21. $\boxed{\textbf{B}}$
22. $\boxed{\textbf{B}}$
23. $\boxed{\textbf{C}}$
24. $\boxed{\textbf{B}}$