Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"

Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A IX-A

Problema 1. Să se determine toate soluţiile (x, y, z, u, v, w) în numere naturale ale sistemului

$$\begin{cases} x^2 + y + 2 = u^2 \\ y^2 + z + 2 = v^2 \\ z^2 + x + 2 = w^2 \end{cases}.$$

Problema 2. Dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$4abc + \sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

Problema 3. Într-un triunghi ABC oarecare notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA, AB, p semiperimetrul şi r raza cercului înscris în triunghi. De asemenea, notăm cu m_a, m_b, m_c, h_a, h_b, h_c lungimile medianelor şi respectiv lungimile înălţimilor din A, B, C. Să se arate că au loc inegalităţile:

(i) $\frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2+c^2}{2bc}$;

(ii) $\frac{1}{p}\left(a \cdot m_a + b \cdot m_b + c \cdot m_c\right) \geq h_a + h_b + h_c - 3r$.

Problema 4. Fie $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq x, y \leq n\}$. Fiecărui element $(x, y) \in \mathcal{M}$ i se asociază un număr unic $a_{x,y}$ din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n^2\}$, astfel încât toate numerele $1, 2, \ldots, n^2$ sunt folosite exact o dată şi pentru orice $y, z \in \{1, 2, \ldots, n\}$, are loc relaţia

$$\sum_{x=1}^{n} a_{x,y} = \sum_{t=1}^{n} a_{z,t}.$$

Să se arate că suma tuturor vectorilor din mulţimea

$$\mathcal{V} = \{\overrightarrow{P_1P_2} \, : \, P_1(x, y), P_2(z, t) \in \mathcal{M}, a_{x,y} < a_{z,t}\}$$

este vectorul nul.

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.