Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"

Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A IX-A - BAREM

Problema 1. *Să se determine toate soluţiile* (x, y, z, u, v, w) *în numere naturale ale sistemului*

$$\begin{cases} x^2 + y + 2 = u^2 \\ y^2 + z + 2 = v^2 \\ z^2 + x + 2 = w^2 \end{cases}.$$

Soluţie. Observăm că $(x, y, z, u, v, w) = (1, 1, 1, 2, 2, 2)$ este o soluție a sistemului. **1p**

Vom demonstra că aceasta este soluția unică.

Fie (x, y, z, u, v, w) o soluție arbitrară. Deoarece $x^2 + y + 2 > x^2$ și $x^2 + y + 2$ este un pătrat perfect, rezultă că $x^2 + y + 2 \geq (x + 1)^2$. În mod similar, avem $y^2 + z + 2 \geq (y + 1)^2$ și $z^2 + x + 2 \geq (z + 1)^2$. **4p**

Însumând aceste inegalități, obținem $x + y + z + 3 \leq 6$, deci $x + y + z \leq 3$. Verificând toate posibilitățile $x + y + z = 0, 1, 2, 3$ rezultă că $x = y = z = 1$. **2p**

□

Problema 2. *Dacă* $a, b, c \in (0, \infty)$, *demonstraţi că are loc inegalitatea*

$$4abc + \sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Soluţie. Prin împărţire cu abc, inegalitatea se scrie

$$4 + \sqrt{2\left(x^2 + 1\right)\left(y^2 + 1\right)\left(z^2 + 1\right)} \geq (x + 1)(y + 1)(z + 1)$$

unde $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. **1p**

Având în vedere că $xyz = 1$ obținem:

$$\sqrt{2\left(2 + \sum x^2 + \sum y^2z^2\right)} \geq \sum x + \sum yz - 2.$$

.... **1p**

Fie $u = \sum x$ și $v = \sum yz$. Atunci $\sum x^2 = u^2 - 2v, \sum y^2z^2 = v^2 - 2u$ și va fi suficient să demonstrăm că

$$\sqrt{2\left(2 + u^2 + v^2 - 2u - 2v\right)} \geq u + v - 2,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că $4 + 2u^2 + 2v^2 - 4u - 4v \geq u^2 + v^2 + 4 + 2uv - 4u - 4v$, adică $(u - v)^2 \geq 0$.

.....................................**3p**

Egalitatea are loc pentru $u = v$, adică $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$, relație care se scrie $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} = 0$. Aşadar obținem egalitate dacă și numai dacă două dintre numerele a, b, c sunt egale.

.....................................**2p**

Remarcă. Inegalitatea se poate demonstra şi prin calcule laborioase. Mai precis, izolând şi ridicând la pătrat radicalul, se poate demonstra că inegalitatea este echivalentă cu

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0.$$

$\square$

Problema 3. *Într-un triunghi ABC oarecare notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA, AB, p semiperimetrul şi r raza cercului înscris în triunghi. De asemenea, notăm cu m_a, m_b, m_c, h_a, h_b, h_c lungimile medianelor şi respectiv lungimile înălţimilor din A, B, C. Să se arate că au loc inegalităţile:*

(i) $\frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2+c^2}{2bc}$;

(ii) $\frac{1}{p}(a \cdot m_a + b \cdot m_b + c \cdot m_c) \geq h_a + h_b + h_c - 3r$.

Soluţie. (i) Inegalitatea cerută este echivalentă cu

$$m_a \geq \frac{b^2+c^2}{\frac{2bc}{h_A}}.$$

Să observăm că numitorul membrului drept este egal cu

$$\frac{2abc}{ah_a} = \frac{2abc}{bc\sin A} = \frac{abc}{S} = 4R,$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului. **1p**

Rămâne să demonstrăm că

$$m_a \geq \frac{b^2+c^2}{4R}.$$

Într-adevăr, folosind lungimea medianei şi teorema cosinusului, avem

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-(b^2+c^2-2bc\cos A)}{4} \\ &= \frac{b^2+c^2+2bc\cos A}{4} = \frac{b^2+c^2-2bc\cos(B+C)}{4} \\ &= \frac{(b\cos B - c\cos C)^2 + (b\sin B + c\sin C)^2}{4} \\ &\geq \frac{(b\sin B + c\sin C)^2}{4} \end{aligned}$$

Folosind teorema sinusului, avem $m_a \geq \frac{b\sin B + c\sin C}{2} = \frac{b^2+c^2}{4R}$. Acum

$$\frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2+c^2}{4R \cdot h_a}$$

şi inegalitatea cerută este echivalentă cu $2R \cdot h_A \geq bc$. **3p**

(ii) Avem

$$\frac{1}{p}\sum a \cdot m_a = \sum \frac{a \cdot m_a}{\frac{a \cdot h_a}{2r}} = 2r \cdot \sum \frac{m_a}{h_a}.$$

....**1p**

De asemenea,

$\sum h_a - 3r = \sum \left(\frac{2S}{a} - \frac{2S}{a+b+c}\right) = 2S\sum\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+c}\right) = \frac{2S}{a+b+c}\sum \frac{b+c}{a} = r\sum \frac{b+c}{a}.$
....**1p**

Din inegalitatea de la (i)

$$\frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2+c^2}{2bc} \Leftrightarrow 2\frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b},$$

deducem că $2\sum \frac{m_a}{h_a} \geq \sum \frac{b+c}{a}$, şi atunci inegalitatea este dovedită. **1p**

$\square$

Problema 4. *Fie* $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \leq x, y \leq n\}$. *Fiecărui element* $(x,y) \in \mathcal{M}$ *i se asociază un număr unic* $a_{x,y}$ *din mulțimea* $\{1, 2, \ldots, n^2\}$, *astfel încât toate numerele* $1, 2, \ldots, n^2$ *sunt folosite exact o dată şi pentru orice* $y, z \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *are loc relaţia*

$$\sum_{x=1}^{n} a_{x,y} = \sum_{t=1}^{n} a_{z,t}.$$

Să se arate că suma tuturor vectorilor din mulţimea

$$\mathcal{V} = \{\overrightarrow{P_1P_2} \ : \ P_1(x,y), P_2(z,t) \in \mathcal{M}, a_{x,y} < a_{z,t}\}$$

este vectorul nul.

Soluţie. Suma tuturor vectorilor din $\mathcal{V}$, în descompunerea după versori este

$$\sum_{\substack{(x,y),(z,t)\in\mathcal{M}\\ a_{x,y}<a_{z,t}}} (z-x)\cdot\vec{i} + (t-y)\cdot\vec{j}.$$

Să observăm că pentru orice $(z,t) \in \mathcal{M}$ avem $a_{z,t}-1$ alegeri pentru $(x,y) \in \mathcal{M}$ astfel încât $a_{x,y} < a_{z,t}$ deci vectorul $z\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j}$ apare în sumă cu un coeficient egal cu

$$a_{z,t} - 1 - (n^2 - a_{z,t}) = 2a_{z,t} - (n^2+1).$$

....**3p**

Aşadar, suma tuturor vectorilor din $\mathcal{V}$, se rescrie

$$\sum_{(z,t)\in\mathcal{M}} [2a_{z,t} - (n^2+1)]\cdot(z\cdot\vec{i} + t\cdot\vec{j}).$$

Din ipoteză $\sum_{t=1}^{n} a_{z,t} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$, ...**1p**
Pentru $z \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixat avem

$$\sum_{t=1}^{n}[2a_{z,t} - (n^2+1)]\cdot z = z\cdot\left[-n(n^2+1) + 2\sum_{t=1}^{n} a_{z,t}\right] = 0$$

Deci coeficientul lui $\vec{i}$ din suma vectorilor din $\mathcal{V}$ este egal cu

$$\sum_{(z,t)\in\mathcal{M}} [2a_{z,t} - (n^2+1)] \cdot z = \sum_{z=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}[2a_{z,t} - (n^2+1)] \cdot z = 0.$$

.... **2p**

În mod analog se arată că

$$\sum_{(z,t)\in\mathcal{M}} [2a_{z,t} - (n^2+1)] \cdot t = 0,$$

deci şi coeficientul versorului $\vec{j}$ este nul. **1p**

$\square$