Clasa a VIII -a

VIII 1. Aflaţi numerele naturale n pentru care numărul:

$$[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$$

se divide cu 7. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a)

Folclor

Soluţie

Fie $N = n(n+2)(n+4)(n+6)$. Încercăm să-l intercalăm pe N între două pătrate perfecte consecutive.

Scriind numărul N sub forma $n(n+6)(n+2)(n+4)$ şi notând $m = n^2 + 6n$ rezultă $N = m(m+8)$, deci $N < (m+4)^2$. **1p**

Pentru $m > 5$ este adevărată şi inegalitatea $(m+3)^2 < N$ (echivalentă cu $9 < 2m$).

Cum $n \geq 1 \Rightarrow m \geq 7$, rezultă că dacă $n \neq 0$ are loc dubla inegalitate

$$m + 3 < \sqrt{N} < m + 4,$$

adică $[\sqrt{N}] = m + 3 = n^2 + 6n + 3$. **3p**

Considerând resturile împărţirii lui n la 7 sau scriind numărul $n^2 + 6n + 3$ sub forma $(n+3)^2 - 6$ şi observând că că un pătrat perfect dă la împărţirea la 7 doar unul dintre resturile $0, 1, 2, 4$, constatăm că nu există niciun număr natural n astfel încât $n^2 + 6n + 3$ să se dividă cu 7. . . . . **2p**

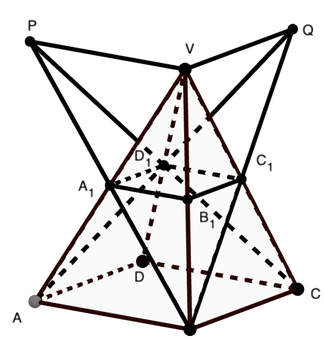
Cum pentru $n = 0$ numărul $[\sqrt{N}]$ este 0, deci se divide cu 7, $n = 0$ este singurul număr care satisface condiţia de divizibilitate din enunţ. **1p**

VIII 2. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv mijloacele muchiilor VA, VB, VC, VD ale piramidei $VABCD$ cu baza patrulaterul convex $ABCD$. Ştim că $VA = VD$, $VB = VC$ şi că dreptele BA_1, CD_1 şi AD_1, BC_1 sunt concurente.

Dacă P este punctul de intersecţie a dreptelor BA_1 şi CD_1, iar Q este punctul de intersecţie a dreptelor AD_1 şi BC_1, aflaţi măsura unghiului PVQ.

Maria Miheţ şi Dorel Miheţ

Soluţie



Din ipoteză rezultă că planul $A_1B_1C_1$ este paralel cu planul bazei şi că $(PBC) \cap (A_1B_1C_1) = A_1D_1, (PBC) \cap (ABC) = BC$.

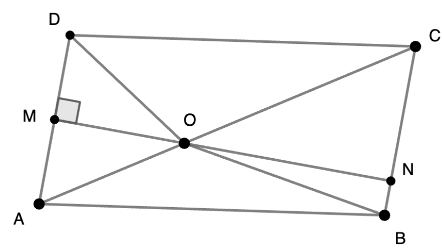
Din "teorema fierăstrăului", dreptele A_1D_1 şi BC sunt paralele şi cum $A_1D_1 \parallel AD$, deducem că $AD \parallel BC$. Analog demonstrăm că $AB \parallel DC$, deci $ABCD$ este un paralelogram. **2p**

Observăm că punctul P se află atât în planul VAB ($P \in BA_1 \subset (VAB)$) cât şi în planul VDC ($P \in CD_1$). Punctul V aparţine şi el acestor două plane, deci $PV = (ABV) \cap (CDV)$. **1p**

Cum $AB \parallel DC$, din "teorema acoperişului" rezultă că $VP \parallel AB$, şi analog $VQ \parallel BC$. Prin urmare $m(\angle PVQ) = m(\angle ABC)$. **2p**

În continuare vom demonstra că $ABCD$ este dreptunghi (de unde va rezulta că măsura unghiului PVQ este $90°$).

Fie O proiecţia lui V pe planul bazei. Din egalităţile $VA = VD$ şi $VB = VC$ rezultă că $OA = OD$ şi $OB = OC$. Aşadar O se află pe mediatoarele segmentelor $[AD]$ şi $[BC]$. Cum $AD \parallel BC$, cele două mediatoare coincid, deci dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor $[AD]$, $[BC]$ atuncii MN este mediatoarea comună a acestor segmente. **1p**



Rezultă că $MN \perp BC$ şi cum $MN \parallel AB$ (pentru că $MNBA$ este paralelogram), dreptele AB şi BC sunt perpendiculare. **1p**

[Rezultatul poate fi intuit din cazul particular $VABCD$ piramidă patrulateră regulată, care satisface condiţiile din enunţ.]

VIII 3. Considerăm numerele întregi nenule a, b, c care satisfac egalitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2.$$

a) Demonstraţi că $a + b + c \neq 2$.

b) Care este cea mai mică valoare posibilă pentru $|a + b + c|$?

Folclor

Soluţie

a) Presupunem, prin reducere la absurd, că există numere întregi nenule a, b, c astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = a + b + c = 2$.

Atunci $2-c^3 = a^3+b^3 = (2-c)(a^2-ab+b^2)$, deci $c-2$ îl divide (în $\mathbb{Z}$) pe c^3-2. Cum $c^3 - 2 = (c^3 - 8) + 6$, $c - 2$ îl divide pe 6, deci $c - 2 \in \{-6, -3, -1, 1, 2, 3, 6\}$

($c-2\neq -2$, pentru că $c\neq 0$), adică c (şi de asemenea a şi b) este unul dintre numerele $-4,-1,1,3,4,5,8$.

Se constată însă imediat că pentru nicio combinaţie de 3 numere din mulţimea $\{-4,-1,1,3,4,5,8\}$ nu putem obţine simultan suma şi suma cuburilor egale 2 (suma 2 se obţine doar din $-1,-1,4$, $-4,3,3$ sau $-4,1,5$). **3p**

Soluţie alternativă

Din identitatea $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$ rezultă că dacă a,b,c sunt numere întregi astfel încât $a+b+c=a^3+b^3+c^3=2$, atunci $(a+b)(b+c)(c+a)=2$, prin urmare $(a+b)(b+c)(c+a)=2$ şi $(a+b)+(b+c)+(c+a)=4$. Din aceste egalităţi deducem că unul dintre factori (de exemplu $a+b$) este 2, iar ceilalţi sunt 1, însă atunci $c=0$, ceea ce este absurd.

b) Deoarece $x^3-x=x(x-1)(x+1)$ se divide cu 6 pentru orice $x\in\mathbb{Z}$, numărul $(a-a^3)+(b-b^3)+(c-c^3)=a+b+c-2$ se divide cu 6, deci este de forma $6l+2, l\in\mathbb{Z}$. **1p**

Din $a+b+c\neq 2$ rezultă că l este diferit de zero, deci $a+b+c\leq -4$ sau $a+b+c\geq 8$. Aşadar $|a+b+c|\geq 4$. **1p**

Cum $7^3+(-5)^3+(-6)^3=2$ şi $|7-5-6|=4$, cea mai mică valoare posibilă pentru $|a+b+c|$ este 4. .... **2p**

[Putem găsi uşor acest exemplu folosind identitatea din soluţia alternativă: pentru $x^3+y^3+z^3=2$ şi $x+y+z=4$ diferenţa $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ nu este multiplu de 3, însă dacă $x+y+z=-4$ numerele x,y,z satisfac şi $(x+y)(y+z)(z+x)=-22$.]

VIII 4. a) Fie n un număr natural nenul şi $x_1,x_2,...,x_n$ numere reale din intervalul $[-2,2]$ cu suma 0. Demonstraţi inegalitatea:

$$|x_1^3+x_2^3+...+x_n^3|\leq 2n.$$

Vasile Şerdean

b) Numerele reale $x_1,x_2,...,x_n$ din intervalul $[-2,2]$ au suma 0 şi

$$|x_1^3+x_2^3+...+x_n^3|=2n.$$

Determinaţi $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$.

Dorel Miheţ

Soluţie

a) Trebuie să arătăm că $-2n\leq x_1^3+...+x_n^3\leq 2n$.

Fiindcă $x\in[-2,2]\Rightarrow x-2\leq 0\Rightarrow (x-2)(x+1)^2\leq 0\Rightarrow x^3-3x-2\leq 0$, numerele $x_1,...,x_n$ satisfac inegalităţile: $x_1^3-3x_1\leq 2,...,x_n^3-3x_n\leq 2$ din care, prin adunare şi ţinând seama de egalitatea $x_1+...+x_n=0$ obţinem $x_1^3+...+x_n^3\leq 2n$. **2p**

Dacă $x\in[-2,2]$ avem de asemenea şi $(x+2)(x-1)^2\geq 0$, deci $x^3-3x+2\geq 0$, de unde obţinem inegalitatea $x_1^3+...+x_n^3\geq -2n$. **1p**

b) Cercetăm când avem egalitate în inegalitatea de la a).

Dacă $x_k \in \{-1, 2\}$ pentru orice $k = 1, ..., n$, pentru ca suma $x_1 + ... + x_n$ să fie 0 trebuie ca fiecare 2 să fie cuplat cu doi de -1, deci n este multiplu de 3, $n = 3l$ şi l dintre numere sunt 2, iar celelalte $2l$ sunt -1. Aşadar $x_1^2 + ... + x_n^2 = 4l + 2l = 6l = 2n$. **2p**

În caz contrar există k (de exemplu $k = 1$) astfel încât $x_k \notin \{-1, 2\}$. Atunci $x_1^3 - 3x_1 < 2$ şi cum $x_2^3 - 3x_2 \leq 2, ..., x_n^3 - 3x_n \leq 2$, suma $x_1^3 + ... + x_n^3$ este strict mai mică decât $2n$, deci este egală cu $-2n$. Cum $x_k^3 - 3x_k + 2 = (x_k + 2)(x_k - 1)^2 \geq 0$ pentru orice k, din această egalitate rezultă $x_k \in \{-2, 1\}$ pentru orice $k = 1, ..., n$, de unde deducem ca mai sus $n = 3l$ şi l numere sunt -2, iar $2l$ sunt 1 şi din nou $x_1^2 + ... + x_n^2 = 6l = 2n$. **2p**

[Inegalitatea $x^3 - 3x \leq 2$ poate fi găsită astfel: ştim că $x \leq 2$ şi dorim o inegalitate de forma $x^3 + \alpha x \leq 2$ (pentru a exploata condiţia $x_1 + ... + x_n = 0$). În acest scop căutăm β astfel încât $x^3 + \alpha x - 2 = (x-2)(x+\beta)^2$. Pentru $x = 2$ egalitatea $x^3 + \alpha x - 2 = (x-2)(x+\beta)^2$ devine $6 + 3\alpha = 0$, deci $\alpha = -3$, iar pentru $x = 0$, $-2 = -2\beta^2$, deci $\beta = \pm 1$. Descompunând în factori membrul stâng sau prin calcul direct se verifică imediat că $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$.]