Clasa a VII -a

VII 1. Demonstraţi egalitatea:

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+...+\sqrt{10+\sqrt{99}}}{\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+...+\sqrt{10-\sqrt{99}}}=1+\sqrt{2}.$$

Olimpiadă Japonia

Din formula radicalilor dubli rezultă că pentru orice $k \in \{1,2,...,99\}$ are loc egalitatea:

$$\sqrt{10+\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{10+\sqrt{100-k}}{2}}+\sqrt{+\frac{10-\sqrt{100-k}}{2}}, \quad \text{deci}$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{10+\sqrt{k}}=\sqrt{10+\sqrt{100-k}}+\sqrt{10-\sqrt{100-k}}. \quad (1)$$

.... **2p**

Fie

$$S=\sqrt{10+\sqrt{1}}+\sqrt{10+\sqrt{2}}+...+\sqrt{10+\sqrt{99}} \quad \text{şi}$$

$$T=\sqrt{10-\sqrt{1}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}+...+\sqrt{10-\sqrt{99}}.$$

Scriind (1) pentru $k=1,2,...,99$ şi adunând egalităţile obţinute deducem că

$$\sqrt{2}S=S+T.$$

.... **3p**

Rezultă că $(\sqrt{2}-1)S=T$, de unde $\dfrac{S}{T}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}$. **2p**

VII 2. În fiecare dintre cele n^2 pătrăţele ale unui tablou pătratic cu n linii şi n coloane este scris numărul 1 sau numărul -1. Aflaţi produsul numerelor din tablou ştiind că suma lor este un pătrat perfect.

Dorel Miheţ

Soluţie

[În cazurile particulare $s=0$, $s=1$ produsul este 1, deci bănuim că rezultatul este 1.]

Notăm cu s suma numerelor din tablou. Când toate numerele sunt 1 suma este n^2. Înlocuind un 1 cu -1 suma scade cu 2, deci $s=n^2-2m$, unde m este numărul de numere negative din tablou. **3p**

[La această egalitate se ajunge şi rezolvând sistemul: $p+m=n^2, p-m=s$.]

Dacă $s=k^2$ atunci $m=\dfrac{n^2-k^2}{2}$, deci n^2 şi k^2 au aceeaşi paritate. Rezultă că diferenţa $n^2-k^2=(n-k)(n+k)$ se divide cu 4, deci m este par. **3p**

Aşadar produsul numerelor din tablou este $(-1)^m=1$. **1p**

[Din $m = \dfrac{n^2 - s}{2}$ rezultă că n^2 şi s au aceeaşi paritate, iar produsul este 1 dacă şi numai dacă $s = 4l$ sau $s = 4l + 1 (l \in \mathbb{Z})$.]

VII 3. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Perpendiculara din A pe mediana din C intersectează în P perpendiculara dusă în B pe latura AB.

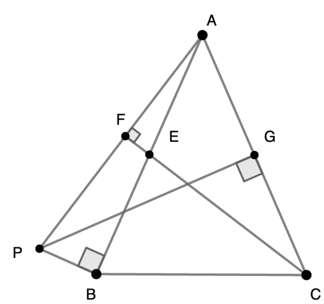
Să se arate că $PA = PC$.

Constantin Cocea

Soluţie

Notăm cu E mijlocul laturii AB şi F intersecţia dintre dreapta CE şi şi perpendiculara din A pe CE.

Fie G piciorul perpendicularei din P pe AC. Demonstrăm că G este mijlocul laturii AC. ˆ **1p**



Deoarece $EFPB$ şi $FPCG$ sunt patrulatere inscriptibile, conform teoremei puterii punctului (scrisă pentru A) avem

$$AF \cdot AP = AE \cdot AB \text{ şi } AF \cdot AP = AG \cdot AC,$$

deci $AE \cdot AB = AG \cdot AC$. **3p**

Cum $AB = AC$, din ultima egalitate rezultă $AG = AE = \dfrac{AC}{2}$, deci G este mijlocul lui AC. **2p**

Deoarece PG este mediană şi înălţime, triunghiul APC este isoscel cu $PA = PC$, ceea ce trebuia demonstrat. **1p**

VII 4. Triunghiul ascuţitunghic ABC are măsura unghiului A de $60°$. Bisectoarele unghiurilor B şi C ale triunghiului intersectează laturile opuse respectiv în E şi F, iar cercul circumscris triunghiului AFC intersectează latura BC în P ($P \neq C$). Demonstraţi că:

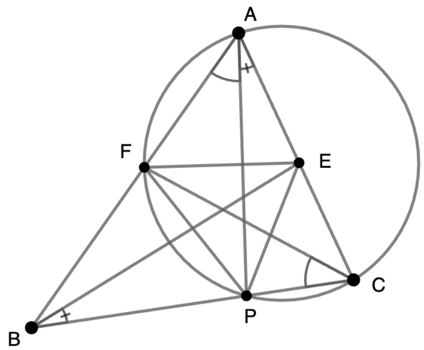
a) $\angle EPF = 60°$.

b) $AP \perp EF$.

Dorel Miheţ

Soluţie

a) Deoarece patrulaterul $ACPF$ este inscriptibil, $\angle FPB = \angle A = 60°$. Aşadar $\angle EPF = 60°$ dacă şi numai dacă $\angle BPE = 120°$, adică dacă şi numai dacă patrulaterul $ABPE$ este inscriptibil. **1p**



Demonstrăm că $\angle EAP = \dfrac{\angle B}{2}$ (de unde rezultă că $\angle EAP = \angle EBP$, deci patrulaterul $ABPE$ este inscriptibil):

$\angle EAP = \angle A - \angle BAP = \angle A - \angle FCB$ (din patrulaterul inscriptibil $AFPC$) şi cum $\angle A = 60° = \dfrac{\angle B + \angle C}{2}$ şi $\angle FCB = \dfrac{\angle C}{2}$, $EAP = \dfrac{\angle B}{2}$.............. **2p**

b) Deoarece patrulaterul $FPCA$ este inscriptibil, $\angle FPA = \angle FCA = \dfrac{\angle C}{2}$ şi $\angle FAP = \angle FCP = \dfrac{\angle C}{2}$, deci triunghiul AFP este isoscel cu $FA = FP$. Analog, folosind patrulaterul inscriptibil $ABPE$, deducem că $EA = EP$. .. **2p**

Punctele punctele F şi E sunt egal depărtate de A şi P, deci EF este mediatoarea segmentului [AP], prin urmare $FE \perp AP$......................... **2p**