Clasa a VI -a

VI 1. Determinaţi numerele prime x, y, z pentru care

$$\frac{2(y+z)}{x}=\frac{8(x+y+z)}{15}=\frac{7(x+y)}{z}.$$

Monica Dragoş

Soluție

Arătăm mai întâi că $x \leq 3$: $\frac{2(y+z)}{x}=\frac{8(x+y+z)}{15} \Longleftrightarrow 8x^2+8x\,(y+z)=30\,(y+z) \Longleftrightarrow 8x^2=(y+z)\,(30-8x)$, de unde rezultă $4x<15$, cu x număr prim, deci $x \leq 3$. **3p**

[Alternativ, $x>3 \Rightarrow x \geq 5$, deci

$\frac{2(y+z)}{5} \geq \frac{2(y+z)}{x}$ şi $\frac{8(x+y+z)}{15} \geq \frac{8(5+y+z)}{15}$, iar din egalitatea

$\frac{2(y+z)}{x}=\frac{8(x+y+z)}{15}$ rezultă $\frac{2(y+z)}{5} \geq \frac{8(5+y+z)}{15}$, ceea ce este absurd.]

Pentru $x=2$ din prima egalitate din enunţ rezultă $15(y+z)=8(2+y+z)$, ceea ce implică $16=7\,(y+z)$, egalitate care nu are loc în mulţimea numerelor naturale. **1p**

Pentru $x=3$, prima egalitate devine $\frac{2(y+z)}{3}=\frac{8(3+y+z)}{15}$, ceea ce implică $y+z=12$. Cum y şi z sunt numere prime, avem posibilităţile $y=5$, $z=7$ sau $y=7$, $z=5$. **1p**

În primul caz $x=3$, $y=7$, $z=5$, însă atunci ultima egalitate din enunţ nu este verificată pentru că $\frac{8(x+y+z)}{15}=8$, iar $\frac{7(x+y)}{z}=\frac{7(3+7)}{5}=14$.... **1p**

În al doilea caz $x=3$, $y=5$ şi $z=7$, iar

$$\frac{2(y+z)}{x}=\frac{8(x+y+z)}{15}=\frac{7(x+y)}{z}=8,$$

deci unica soluţie este $x=3$, $y=5$, $z=7$. **1p**

VI 2. Pe tablă sunt scrise 5 numere naturale consecutive de două cifre. Printre ele există 3 cu suma divizibilă cu 37 şi 3 cu suma divizibilă cu 71. Care sunt cele 5 numere scrise pe tablă?

Olimpiadă Sankt Petersburg

Soluţie

Suma celor mai mari 3 numere consecutive de 2 cifre este 97+98+99=294.

Multiplii nenuli lui 71 mai mici decât 294 sunt 71, 142, 213, 284, iar multipllii nenuli lui 37 mau mici decât 294 sunt 37, 74, 111, 148, 185, 222, 259, 296... **2p**

Fie $a, a+1, a+2, a+3, a+4$ cele 5 numere consecutive de 2 cifre. Suma celor mai mari trei numere este $3a+9$, iar suma celor mai mici 3 numere este

$3a + 3$, deci diferenţa a două sume de câte 3 numere este cel mult 6. Aşadar cele două sume pot fi doar 142 şi 148 sau 71 şi 74. .... **2p**

În primul caz diferenţadintre cele două sume este 6, deci trebuie ca $3a+3 = 142$, însă 142 nu se imparte exact la 3. .... **1p**

În al doilea caz, din $3a + 3 \leq 71$ şi $3a + 9 \geq 74$ deducem că $a = 22$. **2p**

Răspuns: cele 5 numere sunt 22, 23, 24, 25 şi 26.

VI 3. Spunem că un număr natural nenul n este " neverosimil" dacă există n numere întregi (nu neapărat distincte) cu suma şi cu produsul egale cu n (de exemplu numărul 12 este neverosimil, pentru că numerele -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3 au suma şi produsul 12). Demonstraţi că:

a) Numărul 2^{10} este neverosimil.

b) Numerele care dau restul 2 la împărţirea la 4 nu sunt neverosimile.

Olimpiadă America Centrală şi Caraibe (prelucrare)

Soluţie

a) Alegem de exemplu 256 numere egale cu -1, 766 numere egale cu 1, un 2 şi un 512. Am găsit astfel 1024 de numere cu suma $-256+766+2+512 = 1024$ şi produsul $(-1)^{256} \cdot 2 \cdot 512 = 1024$. **3p**

[Putem ajunge la acest exemplu astfel: alegem a de -1, b de 1, un 2 şi un $2^9 = 512$, deci $a + b + 2$ numere cu produsul $(-1)^a \cdot 1024$ şi suma $-a + b + 514$, iar din condiţia $a + b + 2 = 1024$ şi $-a + b + 514 = 1024$ aflăm a şi b (cunoscând suma şi diferenţa lor).]

b) Presupunem, prin reducere la absurd, că există $4k + 2$ numere întregi $x_1, x_2, ..., x_{4k+2}$ astfel încât $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{4k+2} = 4k+2$ şi $x_1+x_2+...+x_{4k+2} = 4k+2$. Deoarece $4k + 2 = 2(2k + 1)$, în produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{4k+2}$ un singur factor este par, iar ceilalţi $4k + 1$ factori sunt impari. **2p**

Suma acestori factori impari este impară şi dacă adăugăm factorul par ea rămâne impară, deci nu poate fi $4k + 2$, în contradicţie cu presupunerea făcută. ... **2p**

VI 4. Triunghiul isoscel ABC cu laturile congruente AB şi AC are măsura unghiurilor de la bază cuprinsă între 30° şi 60°. În interiorul triunghiului considerăm punctul P cu proprietatea că $\angle PBC = 30°$ şi $\angle PCB = 60° - \angle C$. Notăm cu M mijlocul lui $[BC]$ şi cu Q intersecţia dreptelor BP şi AM.

a) Demonstraţi că $\triangle AQC \equiv \triangle PQC$.

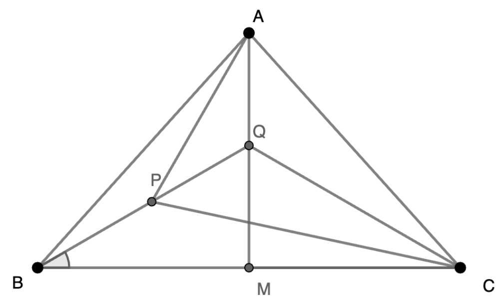
b) Determinaţi măsura unghiului A ştiind că $\angle APC = 75°$.

Dorel Miheţ

Soluţie

a) [Observăm că $\angle PCB < 30°$, deci punctul Q se află pe prelungirea segmentului $[PQ]$.]

Deoarece $AB = AC$ şi $MB = MC$, AM este mediatoarea segmentului $[BC]$, deci $AM \perp BC$ şi de asemenea $QB = QC$ (pentru că punctul Q se află pe mediatoarea lui $[BC]$). **1p**



Triunghiurile AQC şi PQC au latura QC comună. Vom demonstrăm că $\angle ACQ = \angle PCQ$ şi $\angle QAC = \angle CPQ$.

Într-adevăr:

-în triunghiul isoscel QBC, $\angle QCB = \angle QBC = 30°$, deci

$$\angle ACQ = \angle C - \angle QCB = \angle C - 30° \quad \text{şi}$$

$$\angle PCQ = \angle QCB - \angle PCB = 30° - (60° - \angle C) = \angle C - 30°;$$

-in triunghiul dreptunghic AMC $\angle QAC = 90° - \angle C$, iar unghiul CPQ este exterior triunghiului BPC, deci

$$\angle CPQ = \angle PBC + \angle PCB = 30° + (60° - C) = 90° - C. \ldots \mathbf{2p}$$

Cum unghiurile congruente QAC şi CPQ se opun laturii comune QC, din criteriul de congruenţă LUU rezultă că $\triangle AQC \equiv \triangle PQC$. **1p**

b) Din congruenţa triunghiurilor AQC şi PQC rezultă că $PC = AC$, deci triunghiul APC este isoscel. Dacă $\angle APC = 75°$ atunci $\angle ACP = 30°$. **1p**

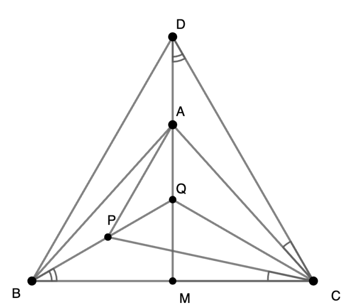
Însă

$$\angle ACP = \angle C - \angle PCB = \angle C - (60° - \angle C) = 2\angle C - 60°. \ldots \mathbf{1p}$$

Rezultă că $2\angle C - 60° = 30°$, deci $\angle C = 45°$ şi $\angle A = 90°$. **1p**

Soluţie alternativă

Construim triunghiul echilateral BCD (vezi figura). **1p**



Deoarece $BC = DC$, $\angle PBC = \angle ADC = 30°$ şi $\angle PCB = \angle ACD = 60° - C$, triunghiurile BPC şi DAC dunt congruente (LUL), deci $PC = AC$ **2p**

Rezultă că triunghiul PAC este isoscel cu unghiul de la vârf ACP egal cu $60° - 2\angle BCP = 60° - 2(60° - \angle C) = 2\angle C - 60°$, deci dacă $\angle APC = 75°$ atunci $\angle ACP = 30°$, de unde $\angle C = 45°$ şi $\angle A = 90°$.............................. **2p**

De asemenea $\angle QCB = \angle QCD = 30°$, şi cum $\angle PCB = \angle ACD$, unghiurile ACQ şi PCQ sunt congruente ca diferenţe de unghiuri congruente, iar din $PC = AC$, $\angle PCQ = \angle ACQ$ rezultă că $\triangle AQC \equiv \triangle PQC$ (LUL). **2p**