Clasa a V -a

V1. Într-o urnă sunt 2025 de bileţele pe care sunt scrise numerele de la 1 la 2025 (câte un număr pe fiecare bileţel). Care este numărul minim de bileţele pe care trebuie să le extragem din urnă pentru a fi siguri că printre numerele extrase există două a căror sumă nu se divide cu 18?

Folclor

Soluţie

În urnă sunt 113 numere care dau restul 9 la împărţirea la 18 ($0 \cdot 18 + 9$, $1 \cdot 18 + 9$, ..., $112 \cdot 18 + 9 = 2025$), şi cum suma oricăror două astfel de numere se divide cu 18, trebuie să extragem cel puţin 114 bileţele. **3p**

Vom arăta că dacă extragem 114 bileţele, atunci printre numerele extrase putem găsi două a căror sumă nu se divide cu 18.

Pentru aceasta arătăm că dacă avem mai mult de două numere cu proprietatea că suma oricăror două se divide cu 18 atunci sau toate numerele se divid cu 18, sau toate numerele dau restul 9 la împărţirea la 18. Într-adevăr, să luăm la întâmplare trei dintre ele, a, b şi c. Deoarece $c + a$ şi $c + b$ se divid cu 18, a şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu 18 (diferenţa lor, $a - b$ se divide cu 18). Dacă $a = 18k + r$, $b = 18l + r$ cu $0 \leq r < 18$, din faptul că $a + b$ se divide cu 18 rezultă că $2r$ se divide cu 18, şi cum $0 \leq 2r < 36$, $2r$ este 0 sau 18, adică $r = 0$ sau $r = 9$. **2p**

În urnă sunt numai 112 multipli de 18 şi 113 numere care dau restul 9 la împărţirea la 18, deci printre cele 114 numere există două cu suma nedivizibilă cu 18.

Aşadar numărul minim cerut este 114. .... **2p**

V2. Dintr-un număr natural n am scăzut suma cifrelor sale, din numărul obţinut am scăzut suma cifrelor sale şi am continuat în acest mod până când am obţinut pentru prima oară un număr de o singură cifră. Aflaţi numerele n cu proprietatea că acest număr se obţine după cea de-a zecea scădere.

Folclor

Soluţie

Diferenţa dintre un număr şi suma cifrelor sale se divide cu 9, deci toate numerele obţinute se divid cu 9. Aşadar numărul de o cifră este 9. .... **2p**

Numerele de două cifre mai mici decât 99 au suma cifrelor 9. De aceea, la a noua scădere rezultatul a fost $9 + 9 = 18$, la a opta 27 ş.a.m.d., deci lanţul ultimelor 8 rezultate ale scăderilor, scris în ordine inversă, este:

$$9 \xleftarrow{10} 18 \xleftarrow{9} 27 \xleftarrow{8} 36 \xleftarrow{7} 45 \xleftarrow{6} 54 \xleftarrow{5} 63 \xleftarrow{4} 72 \xleftarrow{3} 81 \ldots \textbf{2p}$$

La 81 se poate ajunge numai din 90 ($81 = 90 - 9$) sau din 99 ($81 = 99 - 18$), prin urmare rezultatul primei scăderi este fie 90, fie 99. .... **1p**

Deoarece $\overline{ab} - a - b = 9a \leq 81$, iar $\overline{1ab} - 1 - a - b = 99 + 9a$, după prima scădere se poate obţine doar 99, din numerele n de trei cifre care au prima cifră 1 şi a doua cifră 0. Acestea sunt 100, 101, ..., 109. . . . . **2p**

V3. Aflaţi toate numerele prime p, q, r, s şi numerele naturale nenule x, y, z, t cu proprietatea:

$$p^{2\cdot x} + q^{2\cdot y} + r^{2\cdot z} + s^{2\cdot t} = p \cdot q \cdot r \cdot s.$$

Maria Miheţ

Soluţie

Observăm mai întâi că nu se poate ca toate cele patru numere prime p, q, r, s să fie impare, pentru că în acest caz membrul stâng al egalităţii din enunţ este un număr par, iar membrul drept un număr impar, ceea ce este imposibil. Aşadar cel puţin unul dintre acestea este 2. . . . . **1p**

Să presupunem de exemplu că $p = 2$. Atunci $4^x + q^{2\cdot y} + r^{2\cdot z} + s^{2\cdot t} = 2 \cdot q \cdot r \cdot s$, deci $q^{2\cdot y} + r^{2\cdot z} + s^{2\cdot t}$ este un număr par şi deoarece suma unui număr impar de numere impare este un număr impar, sau două dintre numerele $q^{2\cdot y}, r^{2\cdot z}, s^{2\cdot t}$ sunt impare, sau toate trei sunt pare. **1p**

Arătăm că primul caz este imposibil. Într-adevăr, să presupunem de exemplu că numerele impare sunt $r^{2\cdot z}$ şi $s^{2\cdot t}$, iar sunt numărul par este $q^{2\cdot y}$, deci $q = 2$. Fiind pătrate perfecte impare, numerele $r^{2\cdot z}$ si $s^{2\cdot t}$ dau restul 1 la împărţirea la 4, dar atunci $p^{2\cdot x} + q^{2\cdot y} + r^{2\cdot z} + s^{2\cdot t} = 4^x + 4^y + r^{2\cdot z} + s^{2\cdot t}$ dă restul 2 la împărrţirea la 4, pe când $p \cdot q \cdot r \cdot s = 4 \cdot r \cdot s$ este multiplu de 4. . . . . **2p**

În al doilea caz numerele prime q, r, s sunt egale cu 2, iar egalitatea devine $4^x + 4^y + 4^z + 4^t = 16$. **1p**

Niciunul dintre numerele x, y, z, t nu poate fi mai mare decât 1, pentru că atunci numărul $4^x + 4^y + 4^z + 4^t$ ar fi mai mare decât 16. . . . .**1p**

Cum $4 + 4 + 4 + 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, concluzionăm că numerele căutate sunt $p = q = r = s = 2$ şi $x = y = z = t = 1$. **1p**

V4. Notăm cu $s(a)$ suma cifrelor numărului natural a. Spunem că un număr natural n este "slim" dacă $s(n)$ şi $s(n + 1)$ au aceeaşi ultimă cifră.

a) Aflaţi diferenţa dintre cel mai mare şi ce cel mai mic număr slim de 11 cifre.

b) Câte numere slim sunt mai mici decât 10^{20}?

Dorel Miheţ

Soluţie

a) Cel mai mare număr de 11 cifre este $10^{11} - 1$. Acest număr nu este însă slim, pentru că $s(10^{11} - 1) = 11 \cdot 9 = 99$ şi $s(10^{11}) = 1$ nu se termină în aceeaşi cifră. Al doilea număr de 11 cifre ca mărime, $M = 98999...9$ este slim: $s(M) = 98$ şi $s(M + 1) = 18$ se termină în 8. Aşadar cel mai mare număr slim de 11 cifre este 9899...9. . . . . **1p**

Arătăm în continuare că numerele slim de 11 cifre se termină în 9 cifre de 9: dacă $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}}$ este un număr slim de 11 cifre, atunci $a_{11} = 9$, pentru că altfel $s(n)$ şi $s(n+1) = s(n)+1$ nu se termină în aceeaşi cifră. La fel, $a_{10} = 9$, pentru că altfel $s(n) = a_1+...+a_{10}+9$ şi $s(n+1) = a_1+...+a_{10}+1$ nu se termină în aceeşi cifră. Continuând în acest mod obţinem pe rând că $a_9 = a_8 = ... = a_3 = 9$.

Cum numărul $m = 10999...9$ este slim $(s(m) = 82, s(m+1) = 2)$, el este cel mai mic număr slim de 11 cifre, deci diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic număr slim de 11 cifre este $M - m = 88 \cdot 10^9$. **1p**

b) Din soluţia de la a) rezultă că numerele N care se tremină în exact 9 cifre de 9 sunt slim, pentru că diferenţa dintre $s(N)$ şi $s(N+1)$ este 80. Constatăm apoi că numerele care se termină în exact $10, 11, ..., 18$ cifre de 9 nu sunt slim, pe când cele care se termină în exact 19 cifre de 9 sunt slim. **2p**

[Demonstraţie directă: dacă un număr N de n cifre se termină în exact k cifre de 9 si are suma primelor $n-k$ cifre egală cu s, atunci $s(N) = 9k+s$ şi $s(N+1) = s+1$. Dacă N este slim atunci $S(N) - S(N+1) = 9k-1$ se termină în 0, deci k se termină în 9, şi cum N are cel mult 20 de cifre, k este 9 sau 19.]

Problema ne cere aşadar să aflăm câte numere de cel mult 20 de cifre se termină în exact 9 de 9 sau în exact 19 de 9.

Numerele de cel mult 20 de cifre care se termină în 19 cifre de 9 sunt 99...9, 199...9, 299...9..., 899...9 (în total 9 numere). **1p**

Numerele de cel mult 20 de cifre care se termină în exact 9 zerouri se obţin din numerele de cel mult 11 cifre care nu se termină în cifra 9, la care adăugăm 9 cifre de 9. Pentru a calcula numărul acestora considerăm numerele de cel mult 11 cifre şi din numărul lor scădem numărul celor care se termină în 9. Numerele care se termină în 9 sunt de forma $10k+9$. Cum cel mai mare număr de 11 cifre este 99....9 (11 de 9), numerele de forma $10k+9$ de cel mult 11 cifre se obţin pentru $k = 0, 1, ..., 99...9$ (10 de 9). Ele sunt în număr de $99...9 + 1 = 10^{10}$, deci $10^{11} - 10^{10} = 9 \cdot 10^{10}$ numere de cel mult 11 cifre nu se termină în 9.

[O altă metodă de calcul se bazează pe "regula produsului": scriem numerele de cel mult 11 cifre cu ultima cifră diferită de 9 sub forma $\overline{a_1a_2a_3...a_{11}}$, cu $0 \le a_1 \le 9$, $0 \le a_2 \le 9$, ..., $0 \le a_{11} \le 8$. Deoarece sunt 10 posibilităţi de alegere pentru a_1, 10 posibilităţi pentru a_2, ..., 10 posibilităţi de alegere pentru a_{10} şi 9 posibilităţi de alegere pentru a_{11}, numărul acestor numere este $10 \cdot 10 \cdot ... \cdot 10 \cdot 9 = 9 \cdot 10^{10}$.]

Prin urmare $9 \cdot 10^{10}$ numere slim se termină în exact 9 zerouri. Adăgând cele 9 numere care se termină în exact 19 zerouri, deducem că $9 \cdot 10^{10} + 9$ dintre numerele mai mici decât 10^{20} sunt slim. **2p**