Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"

Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A XII-A

Problema 1. Se consideră grupul $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e. Presupunem că $\alpha \in G$, astfel încât $\alpha \neq e$, $\alpha^2 = e$ şi $|G \setminus \{e, \alpha\}| \geq 3$. Dacă oricare ar fi $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$ avem $x^2 = \alpha$, să se arate că:

a) pentru orice $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$, are loc $\alpha x = x\alpha$;

b) pentru orice $x, y \in G \setminus \{e, \alpha\}$, $y \neq x$, $y \neq \alpha x$, avem $xy, yx \in G \setminus \{e, \alpha\}$;

c) $|G| \geq 8$.

Problema 2. Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x \cos x}{1 + \cos^6 x} dx.$$

Problema 3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că dacă $x \in A$ şi $6x = 0$ atunci $x = 0$. Dacă $a, b, c \in A$ astfel încât $a - b, b - c, c - a$ sunt idempotente, arătaţi că $a = b = c$.

Problema 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to [a, b]$ două funcţii continue şi crescătoare care satisfac proprietăţile:

(i) $f(a) = a$, $g(b) = b$;

(ii) $g(x) < x < f(x)$, oricare ar fi $x \in (a, b)$.

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(g(x))dx - \int_a^b g^n(f(x))dx \right) = (b - a)^2,$$

unde pentru o funcţie $h : [a, b] \to [a, b]$ şi $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, am notat $h^k = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{\text{de } k \text{ ori}}$, adică compunerea lui h cu ea însăşi de k ori.

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.