Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"
Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A XII-A - BAREM

Problema 1. *Se consideră grupul $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e. Presupunem că $\alpha \in G$, astfel încât $\alpha \neq e$, $\alpha^2 = e$ şi $|G \setminus \{e, \alpha\}| \geq 3$. Dacă oricare ar fi $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$ avem $x^2 = \alpha$, să se arate că:*

a) pentru orice $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$, are loc $\alpha x = x\alpha$;
b) pentru orice $x, y \in G \setminus \{e, \alpha\}$, $y \neq x$, $y \neq \alpha x$, avem $xy, yx \in G \setminus \{e, \alpha\}$;
c) $|G| \geq 8$.

Soluţie. a) Se arată uşor că dacă $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$, atunci $\alpha x, x\alpha \in G \setminus \{e, \alpha\}$.

Tinând seama de ipoteză, dacă $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$ avem că $x^2 = \alpha$ şi $(\alpha x)^2 = \alpha$. De aici rezultă că $(\alpha x)^2 = x^2$ şi deci $\alpha x \alpha = x$. Concluzia rezultă prin înmulţire la stânga cu α.

.... **1p**

b) Din $|G \setminus \{e, \alpha\}| \geq 3$ rezultă că există două elemente x, y cu această proprietate. Dacă prin absurd $xy = e$, atunci $x^2 y = x$ say $\alpha y = x$, de unde $\alpha^2 y = \alpha x$, deci $y = \alpha x$, o contradicţie.

Similar, dacă $xy = \alpha$, atunci $x^2 y = x\alpha$, deci $\alpha y = x\alpha$. Dar din a) rezultă $\alpha y = \alpha x$, de unde $y = x$, o contradicţie.

.... **2p**

c) Cum $|G| \geq 3$, rezultă că există $x \in G \setminus \{e, \alpha\}$. Aşadar $x^2 = \alpha$ şi $x^4 = e$, deci $o(x) = 4$. Fie $H = \langle x \rangle$. Cum H este subgrup a lui G şi $|H| = 4$, din teorema lui Lagrange rezultă că $|G| = 4k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă prin absurd $k = 1$, atunci $G = H = \langle x \rangle$. Dar să observăm că $\alpha = x^2$, singurul element de ordinul 2 şi atunci $|G \setminus \{e, x^2\}| = 2$, o contradicţie. Deci $k \geq 2$, de unde rezultă $|G| \geq 8$.

.... **4p**

□

Problema 2. *Să se calculeze*

$$\int_0^\pi \frac{x \sin 2x \cos x}{1 + \cos^6 x} dx.$$

Soluţie. Avem

$$\frac{x \sin 2x \cos x}{1 + \cos^6 x} = \frac{2x \sin x \cos^2 x}{1 + \cos^6 x} = \frac{2x \sin x \left(1 - \sin^2 x\right)}{1 + \left(1 - \sin^2 x\right)^3},$$

de unde rezultă
$$I = 2\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx,$$
unde $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(t) = \frac{t\left(1-t^2\right)}{1+\left(1-t^2\right)^3}$.

.... **2p**

Cu schimbarea de variabilă $y = \pi - x$ se obţine
$$I = 2\int_0^{\pi} (\pi - y) f(\sin y)dy = 2\pi \int_0^{\pi} f(\sin y)dy - I \Longrightarrow I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin y)dy \qquad (1)$$

.... **2p**

Acum putem calcula
$$\int_0^{\pi} f(\sin y)dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y\left(1-\sin^2 y\right)}{1+\left(1-\sin^2 y\right)^3}dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y \cos^2 y}{1+\cos^6 y}dy =$$
$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}\arctan u\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{6}$$
unde am folosit schimbarea de variabilă $u = \cos^3 y$.

Înlocuind în (1) obţinem $I = \frac{\pi^2}{6}$.

.... **3p**

□

Problema 3. *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel cu proprietatea că dacă* $x \in A$ *şi* $6x = 0$ *atunci* $x = 0$*. Dacă* $a, b, c \in A$ *astfel încât* $a - b, b - c, c - a$ *sunt idempotente, arătaţi că* $a = b = c$*.*

Proof. Fie $x = a - b$ şi $y = b - c$. Ipoteza devine: $x^2 = x, y^2 = y, (x + y)^2 = -x - y$, de unde va rezulta că $2x + 2y + xy + yx = 0$. (1)

.... **1p**

Multiplicând această relație la stânga respectiv la dreapta cu x și ținând cont că $x^2 = x$, se va obține $2x + 3xy + xyx = 0$ respectiv $2x + 3yx + xyx = 0$. Scăzând aceste relații va rezulta $3(xy - yx) = 0$ deci $6(xy - yx) = 0$ și conform ipotezei obținem $xy = yx$.

.... **2p**

Atunci relaţia (1) devine devine $2(x + y + xy) = 0$, deci $6(x + y + xy) = 0$ și conform ipotezei $x + y + xy = 0$ (2).

.... **2p**

Multiplicând relaţia (2) cu x respectiv y obţin $x+2xy = 0$ respectiv $y+2xy = 0$, de unde va rezulta $x = y = -2xy$ (3).

.... **1p**

Relaţiile (2) şi (3) asigură faptul că $3xy = 0$ deci $xy = 0$. Din (3) obţinem concluzia.

.... **1p**

□

Problema 4. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$ *cu* $a < b$ *şi* $f, g : [a, b] \to [a, b]$ *două funcţii continue şi crescătoare care satisfac proprietăţile:*

(i) $f(a) = a$, $g(b) = b$*;*

(ii) $g(x) < x < f(x)$, *oricare ar fi* $x \in (a, b)$.

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(g(x))dx - \int_a^b g^n(f(x))dx\right) = (b-a)^2,$$

unde pentru o funcţie $h : [a, b] \to [a, b]$ *şi* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, *am notat* $h^k = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{\text{de } k \text{ ori}}$, *adică compunerea lui* h *cu ea însăşi de* k *ori.*

Soluţie. Din continuitate şi (ii) avem că $g(a) = a$ şi $f(b) = b$.

.... **1p**

Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ şirurile de funcţii definite prin $f_n(x) = f^n(g(x))$, $g_n(x) = g^n(f(x))$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in [a, b]$.

În mod evident $f_{n+1} = f \circ f_n$ şi $g_{n+1} = g \circ g_n$. Cum pentru orice $x \in (a, b)$ avem $g(x) < f(g(x))$ avem că $f(g(x)) < f^2(g(x))$, adică $f_1(x) < f_2(x)$ şi inductiv găsim că şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este un şir strict crescător.

.... **2p**

Dacă $x \in [a, b]$, evident că şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este strict crescător şi mărginit, deci convergent. Având în vedere că $f(a) = a$ şi $f_{n+1} = f \circ f_n$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x = a \\ b, & \text{dacă } x \in (a, b] \end{cases}.$$

şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = b(b-a)$.

.... **3p**

Analog se arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = a(b-a)$, de unde rezultă concluzia.

.... **1p**

$\square$