Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"

Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A XI-A

Problema 1. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n^2}}\right).$$

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $\operatorname{rang}(A+iB)=1$. Arătaţi că:

a) $\operatorname{rang}(A)\le 2$ şi $\operatorname{rang}(B)\le 2$;

b) $AB+BA=\operatorname{Tr}(A)B+\operatorname{Tr}(B)A$;

c) dacă $\operatorname{Tr}(A^2+B^2)=0$, atunci $AB=BA$.

Problema 3. Să se determine funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât funcţiile $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x^{2k-1})$ şi $h(x)=f(x^{2k})$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, sunt periodice.

Problema 4. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi matricele inversabile $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=BA$ şi $AB^{-1}+BA^{-1}=-I_n$. Să se demonstreze că

$$\operatorname{rang}(A+B+C)=\operatorname{rang}(A^{-1}+B^{-1}+C^{-1}).$$

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.