Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"
Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A XI-A - BAREM

Problema 1. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n^2}}\right).$$

Soluţie. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\frac{\sin^2\frac{1}{2n}}{\sin^2\frac{1}{2n^2}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{4t^2}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2 2t^2}\right)=$$
$$\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2t^2-4t^2\sin^2 t}{t^2\sin^2 2t^2}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 2t^2-4t^2\sin^2 t}{4t^6}=\frac{1}{8}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t^2+2t\sin t}{2t^2}\cdot$$
$$\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t^2-2t\sin t}{t^4}=\frac{1}{8}L_1\cdot L_2.$$

Evident $L_1=2$. **4p**

Aplicând succesiv regula lui l'Hopital, obţinem

$$L_2=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t^2-2t\sin t}{t^4}=\frac{1}{3},$$

deci limita căutată este $\frac{1}{8}L_1\cdot L_2=\frac{1}{12}$.

.... **3p**

$\square$

Remarcă. Limita poate fi calculată şi folosind dezvoltarea în serie Taylor a lui $\cos x$, în jurul lui 0. Mai precis, se poate arăta că raportul din paranteză este egal cu

$$\frac{\frac{1}{2n^2}\left(1-\frac{1}{12n^2}+\cdots\right)}{\frac{1}{2n^4}(1+\cdots)}=\frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2n^4}}\cdot\frac{1-\frac{1}{12n^2}+\cdots}{1+\cdots}=n^2\left(1-\frac{1}{12n^2}+\cdots\right),$$

unde am omis scrierea unor puteri negative mai mari ale lui n. Aşadar, expresia cerută este $\frac{1}{12}+o(n)$.

Problema 2. *Fie* $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *astfel ca* $\operatorname{rang}(A+iB)=1$. *Arătaţi că:*

a) $\operatorname{rang}(A)\le 2$ *şi* $\operatorname{rang}(B)\le 2$*;*
b) $AB+BA=\operatorname{Tr}(A)B+\operatorname{Tr}(B)A$*;*
c) dacă $\operatorname{Tr}(A^2+B^2)=0$, *atunci* $AB=BA$.

Soluţie. a) Întrucât A şi B au elementele reale va rezulta că $\operatorname{rang}(A - iB) = 1$.

.... **1p**

Atunci $2 = \operatorname{rang}(A + iB) + \operatorname{rang}(A - iB) \geq \operatorname{rang}(A + iB + A - iB) = \operatorname{rang} A$ şi $2 = \operatorname{rang}(A + iB) + \operatorname{rang}(A - iB) \geq \operatorname{rang}(A + iB - (A - iB)) = \operatorname{rang} B$.

.... **1p**

b) Dacă $\operatorname{rang} X = 1$ este cunoscut faptul că $X^2 = \operatorname{Tr}(X)X$. Pentru $X = A+iB$, relația anterioară devine $A^2-B^2+i(AB+BA) = \operatorname{Tr} A\cdot A-\operatorname{Tr} B\cdot B+i(\operatorname{Tr} A\cdot B+\operatorname{Tr} B\cdot A)$. Identificând părțile imaginare se va obține cerința.

.... **1p**

c) Deoarece $\operatorname{rang}(A + iB) = 1$, există o matrice coloană $C \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ si o matrice linie $L \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ astfel ca $A + iB = C \cdot L$. Întrucât A, B au elementele reale, va rezulta $A - iB = \bar{C} \cdot \bar{L}$.

Atunci putem scrie $(A - iB)(A + iB) = \bar{C} \cdot \bar{L} \cdot C \cdot L$, adică

$$A^2 + B^2 + i(AB - BA) = \bar{C} \cdot (\bar{L} \cdot C) \cdot L, \text{deci } A^2 + B^2 + i(AB - BA) = (\bar{L} \cdot C) \cdot \bar{C} \cdot L (*)$$

Aplicând urma în $(*)$ şi ţinând cont că $\operatorname{Tr}(AB - BA) = 0, \operatorname{Tr}(\bar{C} \cdot L) = L \cdot \bar{C}$, se va obține:

$$\operatorname{Tr}\left(A^2 + B^2\right) = (\bar{L} \cdot C) \cdot (L \cdot \bar{C}) = (\bar{L} \cdot C) \cdot \overline{(\bar{L} \cdot C)} = |\bar{L} \cdot C|^2, \text{ deci } \operatorname{Tr}\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$$

Dacă $\operatorname{Tr}(A^2 + B^2) = 0$, reiese că $\bar{L} \cdot C = 0$ şi din $(*)$ obținem cerința.

.... **4p**

□

Problema 3. *Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^{2k-1})$ şi $h(x) = f(x^{2k})$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt periodice.*

Proof. Avem că (1) $f(x) = g(x^{\frac{1}{2k-1}})$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi atunci $h(x) = g(x^{\frac{2k}{2k-1}})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Notăm $r = \frac{2k}{2k-1} > 1$.

.... **1p**

Demonstrăm că g este constantă. Fie $T > 0$ o perioadă a lui g, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şirurile definite prin $a_n = a + nT$, $b_n = b + nT$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n, b_n > 0$, $\forall n \geq n_0$.

.... **1p**

În mod cert

$$|g(a) - g(b)| = |g(a_n) - g(b_n)| = |h(a_n^{\frac{1}{r}}) - h(b_n^{\frac{1}{r}})| \qquad (2)$$

Pe de altă parte

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n^{\frac{1}{r}} - b_n^{\frac{1}{r}}\right) = \lim_{n\to\infty} (b + nT)^{\frac{1}{r}} \left[\left(\frac{a + nT}{b + nT}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right] = \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} (b + nT)^{\frac{1}{r}} \cdot \frac{a - b}{b + nT}$$

$$= \frac{a - b}{r} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(b + nT)^{1-\frac{1}{r}}} = 0, \qquad (3)$$

deoarece $1 - \frac{1}{r} > 0$.

.... **1p**

Cum h este periodică şi continuă, atunci ea este uniform continuă, ceea ce ne conduce la $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ astfel încât

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ cu } |x - y| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \epsilon \qquad (4)$$

.... **2p**

Pe de altă parte din (3) deducem că există $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, astfel încât $|a^{\frac{1}{r}}_n - b^{\frac{1}{r}}_n| < \delta$ şi atunci din (2) şi (4) deducem că $|g(a) - g(b)| < \epsilon$. Cum ϵ este ales arbitrar, rezultă g este constantă şi atunci f este constantă.

Funcţiile constante verifică cerinţa problemei.

.... **2p**

□

Problema 4. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricele inversabile $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ şi $AB^{-1} + BA^{-1} = -I_n$. Să se demonstreze că*

$$\operatorname{rang}(A + B + C) = \operatorname{rang}(A^{-1} + B^{-1} + C^{-1}).$$

Soluţie. Dacă $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci

$$X + Y = X(I_n + X^{-1}Y) = X(Y^{-1} + X^{-1})Y = X(X^{-1} + Y^{-1})X,$$

deci

$$\operatorname{rang}(X + Y) = \operatorname{rang}(X^{-1} + Y^{-1}) \qquad (1).$$

.... **2p**

Să observăm că

$$(A + B)\left(A^{-1} + B^{-1}\right) = AA^{-1} + AB^{-1} + BA^{-1} + BB^{-1} = I_n - I_n + I_n = I_n.$$

De aici rezultă çă $A + B$ este inversabilă şi că $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

.... **4p**

Aplicând (1) pentru $X = A + B$ şi $Y = C$, deducem egalitatea dorită.

.... **1p**

□

Remarcă. Relaţia (1) este cunoscută şi poate fi acceptată fără demonstraţie.