Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"

Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A X-A

Problema 1. (1) Fie ABC un triunghi direct orientat. Să se arate că

$$z(A) = z(B) + \frac{c}{a}(z(C) - z(B)) \cdot (\cos B + i \sin B),$$

unde $z(X)$ este afixul punctului X.

(2) Considerăm $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon direct orientat şi triunghiurile asemenea $A_1M_1A_2$, $A_2M_2A_3$, $\dots$, $A_nM_nA_1$ situate în exteriorul poligonului. Să se demonstreze că poligoanele $A_1A_2 \dots A_n$ şi $M_1M_2 \dots M_n$ au acelaşi centru de greutate, unde prin centrul de greutate al unui poligon înţelegem punctul din plan care are afixul media aritmetică a afixelor vârfurilor sale.

Problema 2. Fie $a, b \in (1, \infty)$ cu $a > b$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$a^{\log_b\left(x - \frac{a-b}{2}\right)} - a = b^{\log_a\left(x - \frac{b-a}{2}\right)} - b.$$

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| \leq 1$. Arătaţi că

$$\left|z^{2n+1} + \varepsilon^{2n+1}\right| + \left|z^{2n} + \varepsilon^{2n}\right| + \dots + \left|z^3 + \varepsilon^3\right| + \left|z^2 + \varepsilon^2\right| + n|z+1| \geq n,$$

unde $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ cu $\varepsilon^3 = 1$.

Problema 4. Fie $a > 1$ un număr real şi $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a^2 \cdot a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(i) Demonstraţi că nu există numere raţionale a astfel încât -1 să fie termen al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$.

(ii) Rămâne adevărată concluzia de la (i) dacă a este iraţional?

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.