Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică „Grigore Moisil"

Cluj-Napoca, 22 martie 2025

CLASA A X-A - BAREM

Problema 1. *(1) Fie ABC un triunghi direct orientat. Să se arate că*

$$z(A) = z(B) + \frac{c}{a}(z(C) - z(B)) \cdot (\cos B + i \sin B),$$

unde $z(X)$ este afixul punctului X.

(2) Considerăm $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon direct orientat şi triunghiurile asemenea $A_1M_1A_2$, $A_2M_2A_3$, $\ldots$, $A_nM_nA_1$ situate în exteriorul poligonului. Să se demonstreze că poligoanele $A_1A_2 \ldots A_n$ şi $M_1M_2 \ldots M_n$ au acelaşi centru de greutate, unde prin centrul de greutate al unui poligon înţelegem punctul din plan care are afixul media aritmetică a afixelor vârfurilor sale.

Soluţie. (1) Orice punct M de pe semidreapta $(BA$ are afixul de forma $z_M = z_B + k \cdot (z_C - z_B) \cdot (\cos B + i \sin B)$, unde $k \in \mathbb{R}_+$. Cum A se află pe această semidreaptă, deducem $k = \frac{c}{a}$ şi atunci egalitatea de la (i) este dovedită.

....**2p**

(2) Din asemănarea dată deducem că

$$\angle M_1A_2A_1 = \angle M_2A_3A_2 = \ldots = \angle M_nA_1A_n = \alpha$$

şi

$$\frac{M_1A_2}{A_1A_2} = \frac{M_2A_3}{A_2A_3} = \ldots = \frac{M_nA_1}{A_nA_1} = k.$$

....**1p**

Atunci din (1) deducem că

$$z(M_1) = z(A_2) + k(z(A_1) - z(A_2))(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$z(M_2) = z(A_3) + k(z(A_2) - z(A_3))(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$\ldots$$

$$z(M_n) = z(A_1) + k(z(A_n) - z(A_1))(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

egalităţi care prin adunare conduc la concluzia problemei. **4p**

□

Problema 2. *Fie $a, b \in (1, \infty)$ cu $a > b$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia*

$$a^{\log_b\left(x - \frac{a-b}{2}\right)} - a = b^{\log_a\left(x - \frac{b-a}{2}\right)} - b.$$

Soluţie. Fie $c = \frac{a-b}{2}$. Este necesar ca $x > c$. Ecuația se scrie echivalent:

$$a^{\log_b(x-c)} - c = b^{\log_a(x+c)} + c \tag{1}$$

Notăm $a^{\log_b(x-c)} - c = y \Rightarrow a^{\log_b(x-c)} = y + c \Rightarrow$

$$\log_b(x-c) = \log_a(y+c) \tag{2}$$

.... **2p**

Din (1) avem

$$b^{\log_a(x+c)} + c = y \Rightarrow b^{\log_a(x+c)} = y - c \Rightarrow \log_a(x+c) = \log_b(y-c) \tag{3}$$

Fie $f : (c, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_b(x-c) + \log_a(x+c)$. Cum f este strict crescătoare, ca și suma de funcții strict crescătoare, deducem că f este injectivă.

.... **2p**

Din (2) şi (3) avem că $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow a^{\log_b(x-c)} - c = x$.

Fie $t = \log_b(x-c)$. Ultima ecuație se scrie $a^t - c = b^t + c \Leftrightarrow 1 = \frac{2c}{a^t} + \left(\frac{b}{a}\right)^t$, ecuație cu soluție unica $t = 1$ (din argumente de monotonie). Va rezulta că $b = x - c$, de unde $x = b + \frac{a-b}{2}$, deci $x = \frac{a+b}{2}$. **3p**

□

Problema 3. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| \leq 1$. Arătaţi că*

$$\left|z^{2n+1} + \varepsilon^{2n+1}\right| + \left|z^{2n} + \varepsilon^{2n}\right| + \cdots + \left|z^3 + \varepsilon^3\right| + \left|z^2 + \varepsilon^2\right| + n|z+1| \geq n,$$

unde $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ cu $\varepsilon^3 = 1$.

Soluţie. Să observăm că dacă $k \in \{1, \ldots, n\}$, avem

$$|\varepsilon^{2k+1} + \varepsilon^{2k}| = |\varepsilon^{2k}| \cdot |1 + \varepsilon| = |-\varepsilon^2| = 1.$$

.... **1p**

Aşadar,

$$1 = |\varepsilon^{2k+1} + \varepsilon^{2k}| = |(z^{2k+1} + \varepsilon^{2k+1}) - z(z^{2k} + \varepsilon^{2k}) + (z\varepsilon^{2k} + \varepsilon^{2k})| \leq$$

$$|z^{2k+1} + \varepsilon^{2k+1}| + |z(z^{2k} + \epsilon^{2k})| + |z\varepsilon^{2k} + \varepsilon^{2k}| \leq |z^{2k+1} + \varepsilon^{2k+1}| + |z^{2k} + \varepsilon^{2k}| + |z+1|.$$

.... **5p**

Însumând inegalităţile pentru $k = \overline{1, n}$, rezultă concluzia.

.... **1p**

□

Problema 4. *Fie $a > 1$ un număr real şi $(a_n)_{n \geq 1}$ şirul definit prin*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{1 - a^2 \cdot a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(i) Demonstraţi că nu există numere raţionale a astfel încât -1 să fie termen al şirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

(ii) Rămâne adevărată concluzia de la (i) dacă a este iraţional?

Soluţie. (i) A demonstra că ecuaţia $a_n + 1 = 0$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$ este echivalent cu a demonstra că $a_n \neq 0, \forall n \geq 2$.

.... **1p**

Considerând şirul $b_n = a \cdot a_n$ şi punând recurenţa din enunţ sub forma:

$$b_{n+1} = \frac{a + b_n}{1 - a \cdot b_n}$$

se observă că $b_n = \operatorname{tg}(n \cdot \operatorname{arctg}(a))$.

.... **3p**

Acum ecuaţia devine $n \cdot \operatorname{arctg}(a) = k\pi$, cu $n \geq 2$, sau altfel spus:

$$a = \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \notin \mathbb{Q}$$

Dar $\operatorname{tg}(q\pi) \in \mathbb{Q}$ cu $q \in \mathbb{Q}$ are ca soluţii $\operatorname{tg}(q\pi) \in \{\pm 1, 0\}$, ceea ce contrazice $a > 1$. **1p**

(ii) Luând, de exemplu, $b_1 = a = \sqrt{3} > 1$, avem că $b_2 = -\sqrt{3} = -a$, ceea ce implică $a_2 = -1$.

.... **2p**

$\square$

Observaţie. Se poate demonstra că

$$a_n = \frac{\frac{1}{2}\left[(1+ia)^{n-1} + (1-ia)^{n-1}\right] + \frac{1}{2ia}\left[(1+ia)^{n-1} - (1-ia)^{n-1}\right]}{\frac{ia}{2}\left[(1+ia)^{n-1} - (1-ia)^{n-1}\right] + \frac{1}{2}\left[(1+ia)^{n-1} + (1-ia)^{n-1}\right]},$$

de unde rezultă concluzia.