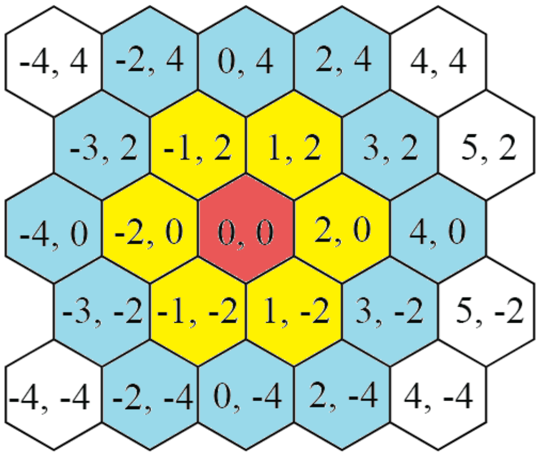
# Mugurița

*Autor: stud. Alex-Matei Ignat, Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca*

Vom aborda problema individual pentru fiecare dintre cele două cerințe: găsirea coordonatelor $(X, Y)$ pentru un număr de pași $Z$ și găsirea numărului de pași $Z$ pentru o pereche de coordonate $(X, Y)$.

Observăm că avem 6 direcții posibile în care vom merge, cele 6 direcții în ordine (în sensul invers al acelor de ceasornic) fiind: $(-1, 2), (-2, 0), (-1, -2), (1, -2), (2, 0), (1, 2)$. De asemenea, putem observa că deplasarea se face pe câte un "inel" de hexagoane, trecând la următorul când toate de pe un inel sunt parcurse. Fiecare inel are $6 \cdot r$ $(r \geq 0)$ hexagoane, unde $r$ este numărul inelului, excepție fiind inelul 0 ce conține un singur hexagon, cel de coordonate $(0, 0)$.

De exemplu, mai jos s-au marcat cu **roșu** inelul 0, cu **galben** inelul 1 și cu **albastru** inelul 2:




## Subtask 1: $C = 1$ și $Z \leq 10^6$

Începând de la căsuța $(0, 0)$, putem parcurge $Z$ căsuțe, mergând cu direcția potrivită la fiecare pas. Știind câte căsuțe avem de parcurs în fiecare direcție, ne oprim după cei $Z$ pași.

Complexitate: $O(Z)$

## Subtask 2 - $C = 1$ și $Z \leq 10^9$

Considerând că avem căsuța în care trebuie să ajungem pe inelul $r$, înseamnă că numărul de hexagoane existente încluzând acel nivel este:

$$1 + 6 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + ... + 6 \cdot r$$

Suma de mai sus se reduce la:

$$1 + 3 \cdot r \cdot (r + 1)$$

Deci, ca să aflăm inelul, putem căuta secvențial cea mai mică valoare a lui $r$ astfel încât această sumă să fie mai mare sau egală decât $Z + 1$ (numărul de pași fiind cu 1 mai mic decât numărul de hexagoane parcurse), aflând astfel inelul pe care se află căsuța de final. Apoi, putem să luăm ca hexagon de început de pe acel inel cel de coordonate $(2r, 0)$, parcurgând restul de $Z - 3 \cdot (r-1) \cdot r$ pași conform observațiilor de la început.

Complexitate: $O(\sqrt{Z})$

## Subtask 3 - $C = 1$ și $Z \leq 10^{18}$

Știind că avem nevoie de cea mai mică valoare $r$ pentru care suma $3 \cdot r \cdot (r+1)$ este mai mare sau egală decât $Z$, putem să folosim funcția *sqrt* pentru determinarea ei sau să căutăm binar acest răspuns. Apoi, pentru a nu parcurge fiecare căsuță în parte, știind că fiecare latură a inelului conține $r$ hexagoane, ne putem deplasa dintr-un colț în altul al laturii, iar în momentul în care ne rămân sub $r$ pași, ne deplasăm direct pe căsuța de final, sărind direct $r$ pași (știind direcția în care ne deplasăm, doar adăugăm la coordonatele colțului laturii de $p$ ori direcția, $p$ fiind numărul de pași rămași).

Complexitate: $O(log\ Z)$

Pentru $C = 2$, fie $Z$ numărul de pași pe care trebuie să-l parcurgem ca să ajungem la căsuța $(X, Y)$. Complexitățile sunt date de acest număr, valoarea lui $Z$ fiind reflectată în funcție de coordonate.

## Subtask 4 - $C = 2$ și $|X|, |Y| \leq 10^3$

Pentru aceste limite, $Z \leq 10^6$. Folosind ideea de la Subtask 1, putem parcurge secvențial fiecare hexagon până când ajungem la cel de coordonate $(X, Y)$.

Complexitate: $O(Z)$

## Subtask 5 - $C = 2$ și $|X|, |Y| \leq 10^6$

Pentru aceste limite, $Z \leq 10^9$. Ca să găsim inelul pe care se află căsuța $(X, Y)$, putem ori să determinăm o formulă deterministică (în funcție de valorile lui $X$ și $Y$), ori o formulă numerică ce funcționează indiferent de valorile lui $X$ și $Y$. O astfel de formulă este:

$$B = \frac{Y}{2}$$
$$A = \frac{X + B}{2}$$
$$r = max(|A|, |B|, |A - B|)$$

După găsirea inelului, știm că numărul de pași până la acel inel este $3 \cdot r \cdot (r-1)$. Apoi, începând de la căsuța $(2r, 0)$, putem parcurge hexagoanele până ajungem la $(X, Y)$.

Complexitate: $O(\sqrt{Z})$

## Subtask 6 - $C = 2$ și $|X|, |Y| \leq 10^9$

Pentru aceste limite, $Z \leq 10^{18}$. După găsirea inelului, putem verifica pe care latură ne aflăm cu ușurință. Începând de la $(2r, 0)$, trebuie să verificăm dacă $(X, Y)$ se află sau nu pe latura curentă. Fie $(A, B)$ coordonatele hexagonului curent (cel pe care ne aflăm) și $px, py$ valorile direcție spre care mergem. $(X, Y)$ se află pe aceeași latură cu $(A, B)$ dacă diferența dintre coordonate este divizibilă cu valorile direcției și câtul împărțirii este cuprins între 0 și $r$. Excepție face cazul în care $py = 0$, atunci a doua condiție este redusă la $Y = B$. Pe scurt, $(A, B)$ și $(X, Y)$ sunt pe aceeași latură considerând direcția $px, py$ ($(A, B)$ fiind înainte de $(X, Y)$ pe latură) dacă:

$$(X - A)\ mod\ px = 0$$

$$(Y - B)\ mod\ py = 0,\ py \neq 0$$

$$0 \leq \frac{X - A}{px} = \frac{Y - B}{py} \leq r,\ py \neq 0$$

Sau:

$$(X - A)\ mod\ px = 0$$

$$Y = B,\ py = 0$$

$$0 \leq \frac{X - A}{px} \leq r,\ py = 0$$

Dacă sunt pe laturi diferite, ne deplasăm direct pe colțul următoarei laturi, făcând $r$ pași. Dacă sunt pe aceeași latură, ne deplasăm direct pe căsuța $(X, Y)$, numărul de pași fiind $\frac{X-A}{px}$.

Complexitate: $O(1)$